

Eine Künnethformel für kohärente analytische Garben



von

Ludger Kaup

aus Haselünne

1965

EINE KÜNNETHFORMEL FÜR KOHÄRENTE
ANALYTISCHE GARBEN

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich - Alexander - Universität
Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt von
Ludger Kaup
aus
Haselünne

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Erlangen - Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 2. 1965

Dekan: Universitätsprofessor Dr. Th. Ernst

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. R. Remmert

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling



Inhaltsübersicht

§ 1	Homologische Algebra	4
§ 2	Komplexe Analysis	12
§ 3	Topologische Tensorprodukte	20
§ 4	Topologien auf Schnittmoduln	43
§ 5	Eine lokale Künnethformel	50
§ 6	Eine globale Künnethformel	59
§ 7	Beispiele und ein Urbildgarbensatz ..	68
	Literaturverzeichnis	77

Einleitung

Bei der Bedeutung, die in den letzten fünfzehn Jahren die Garbentheorie für die komplexe Analysis gewonnen hat, ist das Interesse an der Berechnung der Čech'schen Kohomologiemoduln mit Koeffizienten in Garben leicht verständlich. In der vorliegenden Arbeit wird speziell die Frage untersucht, wie sich die Kohomologie eines Produktraumes aus der Kohomologie der Komponenten bestimmen läßt. Für den Fall algebraischer Varietäten, deren Theorie auch für die komplexe Analysis wichtige Beiträge liefert (vgl. etwa Serre [3]), haben Sampson und Washnitzer 1959 in [1] folgende Künnethformel bewiesen: Sind X und Y algebraische Varietäten (im Sinne von Serre [1]), sind F und G kohärente algebraische Garben auf X bzw. Y , dann gilt:

$$(*) \quad H(X, F^*) \otimes H(Y, G^*) = H(X \times Y, F^* \otimes G^*)$$

wobei F^* bzw. G^* die algebraischen Urbildgarben bezeichnen. Wenn nun X und Y komplexe Räume (im Sinne von Grauert [1]) sind und F bzw. G kohärente analytische Garben, gilt dann die gleiche Formel? Beim Übergang von der algebraischen Geometrie zur "analytischen Geometrie" ist man es in der allgemeinen Theorie gewohnt, in einem hier nicht zu präzisierenden Sinne die auftretenden Funktionenräume komplettieren zu müssen. Auch bei unserer Frage zeigt sich an einem einfachen Beispiel (2.6), daß eine rein algebraische Formel des Typs (*) nicht immer richtig ist. So gelingt es im allgemeinen nicht, holomorphe Funktionen etwa auf einem Produktraum durch endliche Summen von Tensorprodukten darzustellen, sondern es ist nur möglich, die holomorphen Funktionen durch Summen von Tensorprodukten "anzunähern". Um dies schärfer fassen zu können,

wird man auf den betrachteten Kohomologiemoduln eine Topologie einführen (§ 4; § 6). Die Definition der Čech'schen Kohomologie legt es nahe, zunächst für einfach strukturierte Teilmengen komplexer Zahlenräume eine "lokale" Künnethformel zu beweisen. Dazu führt man auf den Schnittmoduln kanonisch eine Frechettopologie ein (§ 4), ferner versteht man das Tensorprodukt zweier Schnittmoduln mit einer Topologie (§ 3, wir gehen dabei nach Grothendieck vor: Die projektive Tensorprodukttopologie π deuten wir an durch $\hat{\otimes}_{\pi}$). Da die Schnittmoduln Frecheträume sind, das projektive Tensorprodukt zweier Frecheträume im allgemeinen jedoch kein Frechetraum ist, haben wir die Kompletierung des projektiven Tensorproduktes, angedeutet durch $\hat{\otimes}_{\pi}$, zu betrachten. Damit läßt sich folgende lokale Künnethformel beweisen (5.1): Seien X und Y komplexe Räume und F bzw. G kohärente analytische Garben auf X bzw. Y . Dann existiert zu jedem $(x, y) \in X \times Y$ eine Umgebung $U = U(x)$, $V = V(y)$ sowie ein kanonischer Isomorphismus topologischer Vektorräume

$$(**) \quad H^0(U, F) \hat{\otimes}_{\pi} H^0(V, G) = H^0(U \times V, F^* \otimes G^*).$$

Für den Fall, daß X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten sind und $F = \mathcal{O}(X)$, $G = \mathcal{O}(Y)$ die Strukturgarben, ist die Behauptung eine leichte Konsequenz Grothendieckscher Untersuchungen (vgl. Grothendieck [2], S. 105). Zum Beweise des Satzes für allgemeines F und G werden die Methoden von Sampson und Washnitzer in [2] wesentlich benutzt (5.3). - Entsprechend der Definition der Čech'schen Kohomologie versucht man nun, aus (**) eine globale Formel zusammenzukleben (§ 6). Wichtiges Hilfsmittel ist dabei eine auf Grothendieck zurückgehende Künnethformel für spezielle topologische Vektorräume (3.7). Um diese anwenden zu können, muß man zeigen, daß die Korandoperatoren der Čech'schen Kohomologie Homomorphismen topologischer Vektorräume sind. Das ist genau dann

der Fall, wenn die topologisierten Kohomologiemoduln hausdorffsch sind. Dies gibt das folgende globale Resultat (6.7): Sind $H(X, F)$ und $H(Y, G)$ hausdorffsch, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus topologischer Vektorräume: $H(X, F) \hat{\otimes}_{\pi} H(Y, G) = H(X \times Y, F^* \otimes G^*)$. Dieser Isomorphismus respektiert die Graduierung; durch Spezialisierung erhält man sofort ein universelles Koeffiziententheorem. Die obigen Voraussetzungen sind speziell erfüllt, wenn X und Y Steinsch oder kompakt sind. - Die Gültigkeit der Künnethformel hängt im wesentlichen von der komplexen Struktur ab, d.h. ist $H(X, \mathbb{C})$ hausdorffsch, dann ist für jedes kohärente analytische F auch $H(X, F)$ hausdorffsch (7.4). Es gibt ein einfaches Beispiel einer komplexen Mannigfaltigkeit M , für die $H(M, \mathbb{C})$ nicht hausdorffsch ist und bei der die Künnethformel für $M \times \mathbb{C}$ nicht gilt. Als einfache Konsequenz der Künnethformel beweist man einen Satz (vgl. 7.2), der als triviales Korollar enthält, daß die analytische Urbildgarbenbildung auf einem Produktraum bezüglich der Projektion auf eine Komponente ein exakter Funktor ist. Bei genauerer Analyse des Beweises stellt sich heraus, daß dieser Satz auch für lokaltriviale holomorphe Abbildungen richtig ist.

Herrn Professor Dr. R. Remmert danke ich für das Thema zur vorliegenden Arbeit und für die Anregungen, die er mir in ausführlichen Diskussionen gab. Herrn Professor Dr. G. Nöbeling sowie allen anderen, die mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben, möchte ich ebenfalls an dieser Stelle meinen Dank abstat-
ten.

KAPITEL I VORBEREITUNGEN

§ 1 Homologische Algebra

Vorbemerkungen: Da wir unter einem Homomorphismus in der folgenden Arbeit eine lineare Abbildung verstehen wollen, die zusätzlich gewisse topologische Eigenschaften hat, werden wir bei algebraischen Betrachtungen von linearen Abbildungen sprechen. - Im ganzen ersten Paragraphen sei A ein kommutativer Ring mit Eins, alle auftretenden Moduln seien unitäre A -Moduln, alle linearen Abbildungen werden als A -linear verstanden.

1.1 Ein Paar (M, δ) heißt differenzierbarer Modul, wenn M ein Modul ist und $\delta: M \rightarrow M$ eine lineare Abbildung mit $\delta\delta = 0$. Falls keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir einfach M statt (M, δ) . Eine lineare Abbildung differenzierbarer Moduln ist eine lineare Abbildung f von Moduln $f: (M, \delta) \rightarrow (M', \delta')$, für die gilt $f \circ \delta = \delta' \circ f$.

Wir setzen $Z(M) := \text{Kern}(\delta)$ und $B(M) := \text{Bild}(\delta)$. Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft $\delta \circ \delta = 0$ können wir den von M abgeleiteten Modul $H(M)$ bilden:

$$H(M) := Z(M) / B(M) .$$

Ist $f: (M, \delta) \rightarrow (M', \delta')$ eine lineare Abbildung, dann gilt $f(Z(M)) \subset Z(M')$ und $f(B(M)) \subset B(M')$, so daß f auf kanonische Weise eine lineare Abbildung induziert:

$$f^*: H(M) \rightarrow H(M')$$

die definiert ist durch $f^*([m]) = [f(m)]$ ($[]$ bezeich-

ne die jeweilige Restklassenbildung).

Man kann die Zuordnung $M \Rightarrow H(M)$ als kovarianten Funktor auf der Kategorie der differenzierbaren A - Moduln mit Werten in der Kategorie der A - Moduln auffassen. Man erhält dann folgenden wichtigen

Satz: Es sei folgende exakte Sequenz differenzierbarer Moduln gegeben:

$$0 \longrightarrow (M', \delta') \xrightarrow{f} (M, \delta) \xrightarrow{g} (M'', \delta'') \longrightarrow 0$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $\partial: H(M'') \longrightarrow H(M)$ so daß folgendes Dreieck exakt ist:

$$\begin{array}{ccc} & H(M) & \\ f^* \nearrow & & \searrow g^* \\ H(M') & \xleftarrow{\partial} & H(M'') \end{array}$$

Hat man zusätzlich folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (M', \delta') & \longrightarrow & (M, \delta) & \longrightarrow & (M'', \delta'') \longrightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & (N', \tilde{\delta}') & \longrightarrow & (N, \tilde{\delta}) & \longrightarrow & (N'', \tilde{\delta}'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

so kommutiert das daraus resultierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H(M'') & \xrightarrow{\partial} & H(M') \\ \downarrow \psi^* & & \downarrow \varphi^* \\ H(N'') & \xrightarrow{\partial} & H(N') \end{array}$$

Zum Beweise vergleiche man etwa Hilton Wylie [1] Theorem 5.5.1 und Theorem 5.6.1. Die Abbildung ∂ wird folgendermaßen konstruiert: Zu $m'' \in Z(M'')$ existiert ein $m \in M$ mit $g(m) = m''$, da g surjektiv. Aus $g(\delta(m)) = \delta''(g(m)) = \delta''(m'') = 0$ folgt $\delta(m) \in f(M')$ wegen der Exaktheit der Sequenz. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $f(m') = \delta(m)$. Es gilt $\delta'(m') = 0$ und man definiert

$$\partial([m'']) := [m'].$$

1.2 Ein Produkt $M = \prod_{p=0}^{\infty} M^p$ von Moduln M^p heißt

graduierter Modul. M^p heißt p -te Komponente von M .
 M heißt Kokettenkomplex, wenn M ein graduierter Modul
 ist mit einem Korandoperator δ , d.h. einer linearen
 Abbildung $\delta: M \rightarrow M$ mit

- i) $\delta \cdot \delta = 0$
- ii) $\delta = (\delta^p)_{p \geq 0}$ mit $\delta^p: M^p \rightarrow M^{p+1}$.

Die Elemente aus M^p heißen p -dimensionale Koketten.
 Man bezeichnet

$Z^n(M) := \text{Kern}(\delta^n)$ als n -te Kozykelgruppe

$B^n(M) := \text{Bild}(\delta^{n-1})$ als n -te Korandgruppe.

Wegen $\delta \cdot \delta = 0$ läßt sich die n -te Kohomologiegruppe
 bilden:

$$H^n(M) := Z^n(M) / B^n(M).$$

Der abgeleitete Modul von M ist dann ein graduierter
 Modul:

$$H^*(M) := \prod_{p=0}^{\infty} H^p(M).$$

Ein Produkt $M = \prod_{p,q \geq 0} M^{pq}$ von Moduln M^{pq} heißt

Doppelkomplex, wenn lineare Abbildungen δ' und δ''
 existieren mit

$$\delta': M^{pq} \rightarrow M^{p+1,q} \quad \text{für alle } p,q \geq 0$$

$$\delta'': M^{pq} \rightarrow M^{p,q+1} \quad \text{für alle } p,q \geq 0$$

und
$$\delta' \cdot \delta' = \delta'' \cdot \delta'' = \delta' \cdot \delta'' + \delta'' \cdot \delta' = 0$$

Aus einem Doppelkomplex M kann man auf drei Weisen einen
 einfachen Komplex machen:

i) $M^n := \prod_{p+q=n} M^{pq}$ mit dem sogenannten to-

talen Korandoperator $\delta := \delta' + \delta''$.

Die Kohomologiemoduln werden mit $H^n(M)$
 bezeichnet.

ii) $M^n := \prod_{q=0}^{\infty} M^{nq}$ mit Korandoperator δ'

und Kohomologiemoduln $H(M)$.

$$\text{iii) } 'M^n: = \prod_{p=0}^{\infty} M^{pn} \text{ mit Korandoperator } \delta''$$

und Kohomologiemoduln $'H(M)$.

Ferner läßt sich beispielsweise $'H^n(M)$ als ein Produkt der Gestalt $\prod_{q=0} 'H^n('M^q)$ schreiben, wobei $'H^n('M^q)$

der n -te Kohomologiemodul des Komplexes $('M^q, \delta')$ ist.

Eine lineare Abbildung vom Grade r von Kokettenkomplexen $f: M \rightarrow M'$ ist eine lineare Abbildung des differenzierbaren Moduls M in M' mit $f(M^p) \subset M'^{p+r}$.

Beispiel: Für $M = M'$ ist der Korandoperator linear vom Grade 1. Ein derartiges f induziert wieder eine Abbildung in den zugehörigen abgeleiteten Moduln:

$$f*: H^p(M) \rightarrow H^{p+r}(M').$$

Ist nun eine exakte Sequenz von Kokettenkomplexen gegeben:

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

dann ergeben sich zum obigen Satz ergänzend folgende Aussagen:

i) ∂ erhöht den Grad um 1, d.h. $\partial: H^p(M'') \rightarrow H^{p+1}(M')$

ii) Das exakte Dreieck wickelt sich auf zu einer unendlich langen exakten Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(M') \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(M'') \xrightarrow{\partial} H^1(M') \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(M'') \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(M') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1.3 Das Tensorprodukt über A ist ein rechtsexakter Funktor. Ist der Basisring A , über den tensoriert wird (im ganzen ersten Paragraphen werde unter $\otimes$ stets $\otimes_A$ verstanden), ein Körper, dann ist jeder Modul ein Vektorraum und somit frei; damit ist das Tensorprodukt sogar ein exakter Funktor.

Sei ein differenzierbarer Modul $M = (M, \delta)$ und ein Modul L gegeben, dann läßt sich $M \otimes L$ kanonisch zu einem differenzierbaren Modul $(M \otimes L, \delta \otimes \text{id})$ machen.

Dabei bedeute id die Identität in L . Weiter existiert eine kanonische lineare Abbildung

$$\varphi: H(M) \otimes L \longrightarrow H(M \otimes L)$$

die folgendermaßen definiert wird: Zu $([m], 1) \in H(M) \times L$ ist $m \otimes 1$ bis auf ein $\delta m' \otimes 1$ eindeutig bestimmt, d.h. $[m \otimes 1]$ ist eindeutig definiert. Die bilineare Abbildung $H(M) \times L \longrightarrow H(M \otimes L)$ induziert das gesuchte φ .

Ist A ein Körper, so ist φ bijektiv. Denn aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow B(M) \longrightarrow Z(M) \longrightarrow H(M) \longrightarrow 0$$

folgt die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow B(M) \otimes L \longrightarrow Z(M) \otimes L \longrightarrow H(M) \otimes L \longrightarrow 0$$

und damit gilt

$$H(M) \otimes L = Z(M) \otimes L / B(M) \otimes L.$$

Entsprechend schließt man

$$0 \longrightarrow Z(M) \longrightarrow M \xrightarrow{\delta} B(M) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Z(M) \otimes L \longrightarrow M \otimes L \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} B(M) \otimes L \longrightarrow 0$$

$$\text{folgt } B(M) \otimes L = B(M \otimes L)$$

$$Z(M) \otimes L = Z(M \otimes L)$$

$$\text{und somit } H(M) \otimes L = H(M \otimes L).$$

1.4 Ist $M = \coprod_{n=0}^{\infty} M^n$ eine Kokettenkomplex und L

ein Modul, so erhält man einen Kokettenkomplex der Gestalt $M \otimes L = \coprod_{n=0}^{\infty} (M^n \otimes L)$ mit dem Korandoperator

$\delta^p \otimes \text{id}: M^p \otimes L \longrightarrow M^{p+1} \otimes L$ und einer kanonischen linearen Abbildung:

$$\varphi: H^n(M) \otimes L \longrightarrow H^n(M \otimes L)$$

Sind M und L Komplexe, so ist $M \otimes L$ der Doppelkomplex

$$(M^n \otimes L^m)_{n,m \geq 0}$$

mit den beiden Korandoperatoren

$$\delta'(m \otimes l) = \delta m \otimes l$$

$$\delta''(m \otimes l) = (-1)^p m \otimes \delta l \quad \text{für } m \in M^p$$

woraus als totaler Korandoperator resultiert

$$\delta(m \otimes l) := \delta m \otimes l + (-1)^p m \otimes \delta l, m \in M^p.$$

Wieder existiert eine kanonische lineare Abbildung

$$\varphi: H^p(M) \otimes H^q(L) \longrightarrow H^{p+q}(M \otimes L)$$

Sei nämlich $m \in Z^p(M)$ und $n \in Z^q(L)$, dann ist

$m \otimes n \in Z^{p+q}(M \otimes L)$ und definiert eindeutig eine Klasse $[m \otimes n]$. Denn wegen $\delta m = \delta n = 0$ gilt für einen äquivalenten Repräsentanten:

$$(m + \delta m') \otimes (n + \delta n') = m \otimes n + \delta(m' \otimes n + m' \otimes \delta n' + (-1)^p m \otimes \delta n').$$

Wir erhalten somit eine bilineare Zuordnung, die das gesuchte φ stiftet. φ induziert seinerseits eine lineare Abbildung

$$\coprod_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(L) \longrightarrow H^n(M \otimes L)$$

und damit ein

$$\chi: H^*(M) \otimes H^*(L) \longrightarrow H^*(M \otimes L).$$

1.5 Wir benötigen einen Spezialfall der algebraischen Künnethformel:

Satz: Sei A ein Körper und seien (M, δ') und (L, δ'') differenzierbare Moduln. Dann gilt:

$$H(M) \otimes H(L) = H(M \otimes L).$$

Beweis (hier nach Schwartz [1] exp. XXIV): Alle aufgeschriebenen Sequenzen sind exakt. Es sei für einen Isomorphismus $\eta: M \longrightarrow M$, $\delta = \delta' \otimes \text{id} + \eta \otimes \delta''$ gesetzt.

$$(i) \quad 0 \longrightarrow Z(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\delta'} B(M) \longrightarrow 0$$

ergibt nach 1.3

$$0 \longrightarrow Z(M) \otimes L \xrightarrow{i \otimes 1} M \otimes L \xrightarrow{\delta' \otimes 1} B(M) \otimes L \longrightarrow 0.$$

(ii) Es gelten folgende Inklusionen:

$$Z(M \otimes L) \subset M \otimes L \quad B(M) \otimes L \subset Z(M) \otimes L \\ B(M) \otimes Z(L) \subset Z(M) \otimes L.$$

(iii) Nach 1.1 Satz resultiert aus (i) folgendes exakte Dreieck:

$$\begin{array}{ccc} H(Z(M) \otimes L) & \longrightarrow & H(M \otimes L) \\ & \nwarrow \scriptstyle \partial & \swarrow \\ & H(B(M) \otimes L) & \end{array}$$

Dabei war ∂ folgendermaßen definiert: Zu $a \in Z(B(M) \otimes L)$ existiert ein $b \in M \otimes L$ mit $(\delta' \otimes 1)(b) = a$. Bezeichnet $[\delta b]$ die Klasse von δb in $H(Z(M) \otimes L)$, dann galt

$$\partial([a]) = [\delta b] .$$

(iv) Wegen $\delta' = 0$ auf $Z(M)$ gilt nach 1.3

$$H(Z(M) \otimes L) = Z(M) \otimes H(L)$$

$$H(B(M) \otimes L) = B(M) \otimes H(L)$$

und somit

$$H(B(M) \otimes L) \subset H(Z(M) \otimes L) .$$

(v) Das a aus (iii) läßt sich nach (iv) aus $B(M) \otimes Z(L)$ wählen, da gilt $B(M) \otimes Z(L) = Z(B(M) \otimes L)$; somit kann b aus $M \otimes Z(L)$ gewählt werden.

(vi) Dies bedeutet, daß $(e \otimes \delta'')(b) = 0$, d.h.

$$\delta(b) = (\delta' \otimes 1 + e \otimes \delta'')(b) = a + 0 = a$$

$$\partial([a]) = [a] .$$

(vii) ∂ hat sich somit als die kanonische Einbettung von $H(B(M) \otimes L) = B(M) \otimes H(L)$ in $Z(M) \otimes H(L)$, das mit $H(Z(M) \otimes L)$ identisch ist, erwiesen.

Aus der Injektivität von ∂ folgt, daß die Abbildung $H(M \otimes L) \rightarrow H(B(M) \otimes L)$ die Nullabbildung ist, so daß wir die exakte Sequenz haben:

$$0 \rightarrow H(B(M) \otimes L) \xrightarrow{\partial} H(Z(M) \otimes L) \rightarrow H(M \otimes L) \rightarrow 0 .$$

Daraus resultiert:

$$\begin{aligned} H(M \otimes L) &= H(Z(M) \otimes L) / H(B(M) \otimes L) \\ &= Z(M) \otimes H(L) / B(M) \otimes H(L) \\ &= H(M) \otimes H(L) \end{aligned}$$

q. e. d.

Bemerkung: Sind M und L Kokettenkomplexe, dann ist der Isomorphismus die in 1.4 angegebene Abbildung χ . Für $m \in M^q$ ist $e(m) := (-1)^q m$. Zu zeigen ist, daß $[m] \otimes [n]$ aus $H^p(M) \otimes H^q(L)$ durch den Isomorphismus auf $[m \otimes n]$ abgebildet wird. Dies ist aber unmittelbar klar aus (vii): $[m] \otimes [n] \rightarrow [m \otimes [n]] \rightarrow [[m \otimes n]] \rightarrow [m \otimes n]$. Damit gilt:

$$H^*(M) \otimes H^*(L) = H^*(M \otimes L) .$$

1.6 Seien E und F Teilringe eines kommutativen Ringes R . In $E \cap F$ sei ein Körper A enthalten. Dann heißen E und F linear disjunkt über A , wenn gilt: Sind $e_1, \dots, e_n$ über A linear unabhängige Elemente aus E , dann sind sie linear unabhängig über F . Ist diese Eigenschaft erfüllt, dann gilt übrigens: Sind $f_1, \dots, f_m$ über A linear unabhängige Elemente aus F , dann sind sie linear unabhängig über E (etwa Weil [1]).

Hilfssatz 1: Seien E und F Teilringe eines kommutativen Ringes R ; ENF enthalte einen Unterkörper A . Dann ist die durch die kanonische Zuordnung definierte lineare Abbildung

$$\sum_1 e_i \otimes f_i \longrightarrow \sum_1 e_i f_i$$

$(e_i \in E, f_i \in F)$ von $E \otimes_A F$ in R eine Injektion genau dann, wenn E und F linear disjunkt über A sind.

Der Beweis (Sampson - Washnitzer [2]) ist trivial: E und F sind Vektorräume über A . Ist (r_i) eine A -Basis von E und (s_k) eine A -Basis von F , dann ist $(r_i \otimes s_k)$ eine A -Basis von $E \otimes F$.

Im folgenden benötigen wir einen weiteren einfachen

Hilfssatz 2: A sei ein Ring mit 1 , der ein Ideal F enthält, G sei ein Ring mit 1 , der ein Ideal H enthält; seien G und H A -Moduln und $F \subset H$. Die kanonische lineare Abbildung

$$g: A/F \otimes_A G/H \longrightarrow A' \otimes_A G/H = G/H$$

mit $g([a], [c]) = a \otimes [c]$ ist bijektiv.

Beweis: g ist wirklich eine Abbildung, da für $b \in F$ gilt: $b \otimes [c] = 1 \otimes [bc] = 1 \otimes 0$, da $bc \in H$. Andererseits existiert die Umkehrabbildung

$$A \otimes G/H \longrightarrow A/F \otimes G/H$$

mit $a \otimes [c] \longrightarrow [a] \otimes [c]$.

§ 2 Komplexe Analysis

Vorbemerkungen: In der Garbentheorie halten wir uns in der Regel an die Bezeichnungen und Ergebnisse von Serre [1], in der komplexen Analysis an Grauert [1], Grauert Remmert [1], [3], ohne daß dies stets explizit erwähnt wird. Wir betrachten nur komplexe Räume mit abzählbarer Topologie. Unter Urbildgarbe wird die analytische Urbildgarbe verstanden, wenn nicht eigens etwas anderes erwähnt wird.

2.1 Sei $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen auf dem topologischen Raum X und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}$ -Moduln auf X . Dann heißt $\mathcal{F}$ von endlichem Typ, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x)$ besitzt, so daß endlich viele Schnitte $s^1, \dots, s^p$ aus $H^0(U, \mathcal{F})$ existieren, die $\mathcal{F}(U)$ über $\mathcal{O}(U)$ erzeugen, d.h. für jedes $y \in U$ besteht der Halm $\mathcal{F}_y$ genau aus allen Linearkombinationen

$$\sum_{m=1}^p f_y^m s^m(y) \quad \text{mit } f_y^m \in \mathcal{O}_y \text{ beliebig.}$$

Bezeichnet $p\mathcal{O}$ die p -fache direkte Garbensumme, dann liefert für $x \in U$ und $(f_x^1, \dots, f_x^p) \in p\mathcal{O}_x$ die Zuordnung

$$\varphi(f_x^1, \dots, f_x^p) := \sum_{m=1}^p f_x^m s^m(x)$$

einen Garbenhomomorphismus $\varphi: p\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Als Relationengarbe der Schnitte $s^1, \dots, s^p$ bezeichnet man die Garbe $R(s^1, \dots, s^p) := \text{Kern}(\varphi)$.

$\mathcal{F}$ heißt kohärent, wenn gilt:

- i) $\mathcal{F}$ ist von endlichem Typ
- ii) Für jede offene Menge $U \subset X$ und jedes Tupel von Schnitten $s^1, \dots, s^p$ aus $H^0(U, \mathcal{F})$ ist die Relationengarbe $R(s^1, \dots, s^p)$ von endlichem Typ.

Um die Kohärenz einer Garbe nachzuweisen, wendet man häufig folgendes Kriterium an:

Satz: Ist $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$ eine exakte Sequenz, in der die Garben A, B, G, H kohärent sind, dann ist die Garbe F kohärent.

Korollar: Sind F und G kohärente $\mathcal{O}$ -Garben und ist $\varphi: F \rightarrow G$ ein Garbenhomomorphismus, dann sind kohärent: $\text{Kern}(\varphi)$, $\text{Bild}(\varphi)$, $\text{Kokern}(\varphi)$, p^*F , $F \otimes_{\mathcal{O}} G$.

Wir werden im folgenden zwei Kohärenzsätze benutzen:

Oka: Die Garbe der Keime von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet in einem komplexen Zahlenraum ist kohärent über sich.

Cartan: Die Idealgarbe einer analytischen Menge in einem Gebiet eines komplexen Zahlenraumes ist kohärent.

2.2 Ein Paar (X, A) heißt (komplex) algebrierter Raum, wenn auf dem topologischen Raum X eine Garbe A von (komplexen) Algebren definiert ist, deren Halme A_x kommutativ und assoziativ mit Einselement 1_x seien und für die die Abbildung $x \rightarrow c \cdot 1_x$ für $c \in \mathbb{C}$ stetig in x sei. A heißt Strukturgarbe von X .

Es bezeichne K_X die Kategorie der Garben von Algebren auf X , versehen mit den Garbenhomomorphismen als Morphismen der Kategorie. Dann induziert jede stetige Abbildung ψ eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y einen exakten kovarianten Funktor $\psi^\#$ von K_Y nach K_X . Da bei konstruiert man zu einer Garbe F aus K_Y die sogenannte topologische Urbildgarbe $\psi^\# F$ folgendermaßen: $\psi^\# F$ habe als Funktmenge $\{(x, f_{\psi x}), x \in X, f_{\psi x} \in F_{\psi x}\}$. $\psi^\# F$ werde als Teilmenge von $X \times F$ mit der induzierten Topologie versehen.

Dann existieren kanonische Abbildungen

$$\pi_X: \psi^\# F \longrightarrow X \quad \pi_F: \psi^\# F \longrightarrow F,$$

π_X ist lokal topologisch. Sind G und H aus K_Y und ist $\chi: G \longrightarrow H$ ein Garbenhomomorphismus, dann wird der zugehörige Garbenhomomorphismus $\psi^\# \chi: \psi^\# G \longrightarrow \psi^\# H$ definiert als die Beschränkung der Abbildung $\chi^+: X \times G \longrightarrow X \times H$ mit $\chi^+(x, g_y) = (x, \chi g_y)$ auf $\psi^\# G$.

Seien (X, A) und (Y, B) algebraisierte Räume. Eine morphe Abbildung Ψ von X in Y ist ein Paar $(\psi, \tilde{\psi})$ einer stetigen Abbildung $\psi: X \longrightarrow Y$ und eines (nichttrivialen) Garbenhomomorphismus $\tilde{\psi}: \psi^\# B \longrightarrow A$. Ψ heißt bimorph, wenn ψ topologisch ist und wenn $\tilde{\psi}$ ein Garbenisomorphismus ist. Sind $\Phi = (\varphi, \tilde{\varphi})$ und $\Psi = (\psi, \tilde{\psi})$ zwei Morphismen, dann ist $\Phi \cdot \Psi := (\varphi \cdot \psi, \tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi} \cdot \psi^\# \varphi)$ ebenfalls ein Morphismus, so daß die algebraisierten Räume samt ihren Morphismen eine Kategorie bilden.

Ein wichtiges Beispiel für einen algebraisierten Raum: Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}_n$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G)$ die Garbe der Keime von holomorphen Funktionen, sei $A \subset G$ eine analytische Menge und sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ eine kohärente Idealgarbe, die A als genaue Nullstellenmenge hat. Dann ist $H(A) := \mathcal{O}/\mathcal{I}$ eine auf A konzentrierte kohärente Garbe von Stellenalgebren. Beschränkt man $H(A)$ auf A , dann ist $(A, H(A))$ ein algebraisierter Raum, genannt analytischer Repräsentantenraum.

Definition: Ein algebraisierter Raum (X, A) heißt komplexer Raum, wenn gilt:

- i) X ist hausdorffsch
- ii) Jeder Punkt x aus X hat eine Umgebung U , die zu einem analytischen Repräsentantenraum bimorph äquivalent ist.

2.3 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein komplexer Raum, dann sind im allgemeinen die Schnitte in der Garbe keine Funktionen. Man

kann jedoch jedem s_x aus einem Halm $\mathcal{O}_x$ einen "Funktionswert" ωs_x in $\mathbb{C}$ zuordnen: Da $\mathcal{O}_x$ eine Stellenalgebra ist, besitzt s_x eine eindeutige Darstellung $s_x = c_x + m_x$ mit $c_x \in \mathbb{C}$ und m_x aus dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_x$. Wir setzen $\omega s_x := c_x$. Dies gestattet, zu $\mathcal{O}$ eine Garbe $\text{Red } \mathcal{O}$ zu definieren, die Reduktion von $\mathcal{O}$: Zwei Schnitte in $\mathcal{O}$ sollen nicht unterschieden werden, wenn sie in jedem Halm den gleichen Funktionswert liefern. Sei $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ für eine offene Menge $U \subset X$, dann ist $\omega s := \{\omega_x s_x \mid x \in U\}$ eine komplexwertige Funktion auf U . Bezeichnet F_X die Garbe aller komplexwertigen Funktionen auf X , dann induziert die Zuordnung $s \rightarrow \omega s$ einen $\mathbb{C}$ -Homomorphismus von $\Gamma(U, \mathcal{O})$ in $\Gamma(U, F)$, dieser einen Garbenhomomorphismus $\omega_0: \mathcal{O} \rightarrow F_X$. Wir setzen $\text{Red } \mathcal{O} := \omega_0 \mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ heißt reduziert, wenn $\text{Red } \mathcal{O} = \mathcal{O}$. $(X, \text{Red } \mathcal{O})$ heißt der zu $(X, \mathcal{O})$ gehörige reduzierte komplexe Raum. Ist A eine analytische Menge in einem Gebiet G eines $\mathbb{C}_n$, dann ist $H(A)$ genau dann reduziert, wenn gilt $H(A) = \mathcal{O}(G)/\tilde{I}(A)$, wobei $\tilde{I}(A)$ die volle Idealgarbe von A ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $H(A)$ keine nilpotenten Elemente enthält.

Die Reduktion läßt sich nämlich auch folgendermaßen beschreiben: Für jedes $x \in X$ bezeichne $T_x(\mathcal{O}_x)$ das Nilradikal von $\mathcal{O}_x$ (ein lokaler Ring heißt reduziert, wenn sein Nilradikal verschwindet), es besteht aus allen Nilpotenten Elementen von $\mathcal{O}_x$. $T = \bigcup_{x \in X} T_x$ ist kanonisch eine Idealgarbe in $\mathcal{O}$. Die Quotientengarbe $\mathcal{O}/T$ ist isomorph zu $\text{Red } \mathcal{O}$. - Man nennt die Schnitte in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktionen und die Morphismen zwischen komplexen Räumen holomorphe Abbildungen.

Ist U eine offene Teilmenge von X , dann ist $(U, \mathcal{O}(U))$ kanonisch ein komplexer Raum. Ein komplexer Raum heißt Steinsch, wenn seine Reduktion Steinsch ist. Eine lokal

endliche Überdeckung (U_i) , $i \in I$, des Raumes X heißt Steinsch, wenn jedes U_i offen ist und $(U_i, \mathcal{O}(U_i))$ ein Steinscher komplexer Raum.

Sei X ein Steinscher komplexer Raum und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X , dann gelten die folgenden Aussagen:

Theorem A: $H^0(X, \mathcal{F})$ erzeugt über $\mathcal{O}(X)$ alle Halme von $\mathcal{F}$.

Theorem B: $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p \geq 1$.

2.4 Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ komplexe Räume, so kann man den Produktraum $X_1 \times X_2$ auf kanonische Weise zu einem komplexen Raum machen, so daß die Projektion π_{X_1} (ebenso natürlich π_{X_2}) von $X_1 \times X_2$ auf X_1 eine holomorphe Abbildung wird. Sei für $k = 1, 2$ $A_k \subset G_k$ ein analytischer Repräsentantenraum für eine offene Menge $U_k \subset X_k$, sei $H_k(A_k) = \mathcal{O}(G_k)/J_k$. Für $z \in G_1 \times G_2$ sei $J_z \subset \mathcal{O}_z$ das Ideal, das von J_{z_1} und J_{z_2} erzeugt wird. Dann ist $J := \bigcup_{z \in G} J_z$. Eine kohärente Idealgarbe mit genauer Nullstellenmenge $A_1 \times A_2$. $H = \mathcal{O}(G)/J$ ist dann eine Strukturgarbe über $A_1 \times A_2$, die zu einer Strukturgarbe über $U_1 \times U_2$ übertragen wird. Die Struktur auf $X_1 \times X_2$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Karten. Sind die X_k reduzierte komplexe Räume, dann ist das Produkt reduziert.

Sei $U \subset X_1$ offen und bezeichne $\pi := \pi_{X_1}$. Dann gehört dazu eine lineare Abbildung $(\tilde{\pi}|U): \Gamma(U, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U \times X_2, \mathcal{O})$ und eine lineare Abbildung der Halme

$$\tilde{\pi}_{(x,y)}: \mathcal{O}(X_1)_x \rightarrow \mathcal{O}(X_1 \times X_2)_{(x,y)}.$$

Da diese Abbildungen injektiv sind, werden wir die Urbilder als Unteralgebren der Bilder auffassen.

Hilfssatz: Seien U und V Gebiete in komplexen Zahlenträumen, dann sind $\Gamma(U, \mathcal{O}(U))$ und $\Gamma(V, \mathcal{O}(V))$ über $\mathbb{C}$ linear disjunkte Teilringe von $\Gamma(U \times V, \mathcal{O}(U \times V))$.

Der Beweis ist trivial: Seien $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(U, \mathcal{O})$

linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Es gelte für $g_1, \dots, g_p \in \Gamma(V, \mathcal{O})$ identisch in x und y

$$\sum_{v=1}^p f_v(x) g_v(y) = 0$$

Für festes y sind die $g_v(y)$ komplexe Zahlen und somit nach Voraussetzung 0. Da dies für alle y gilt, folgt:
 $g_v = 0$.

Mit 1.6 Hilfssatz 1 ergibt sich daher

Korollar: $H^0(U, \mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(V, \mathcal{O}) \subset H^0(U \times V, \mathcal{O})$.

2.5 Als nächstes soll der Begriff der (analytischen) Urbildgarbe eingeführt werden. Seien X und Y komplexe Räume und sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Auf Y sei die analytische Garbe $F = (F, \pi, Y)$ gegeben. Es ist klar, daß man $\tau^{\#}F$ in natürlicher Weise als $\tau^{\#}\mathcal{O}(Y)$ -Garbe auffassen kann. Andererseits existiert nach Voraussetzung über τ ein Garbenhomomorphismus $\tilde{\tau}: \tau^{\#}\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, so daß $\mathcal{O}(X)$ zu einer $\tau^{\#}\mathcal{O}(Y)$ -Garbe wird. Das ermöglicht folgende

Definition: Die Garbe $\tau^*F := \tau^{\#}F \otimes_{\tau^{\#}\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(X)$ heißt analytische Urbildgarbe von F bez. τ .

Die Urbildgarbenbildung ist ein kovarianter, additiver, tensoriell-multiplikativer, rechtsexakter Funktor. Die Urbildgarbe einer kohärenten Garbe ist wieder kohärent. $\tau^*(p\mathcal{O}(Y))$ ist in natürlicher Weise isomorph zu $p\mathcal{O}(X)$. Wir werden im folgenden $\mathcal{O}^*$ statt $\mathcal{O}(X) = \tau^*\mathcal{O}(Y)$ schreiben. Da für unsere Untersuchungen von besonderer Bedeutung der Fall ist, daß τ die Projektionsabbildung π eines Produktraumes auf eine Komponente ist, werden wir abkürzend F^* statt π^*F schreiben. Ferner bedeute bei der Tensorierung kohärenter analytischer Garben $F \otimes G$ stets $F \otimes_{\mathcal{O}^*} G$, wenn nicht explizit etwas anderes vermerkt wird.

Da die Strukturgarbe $\mathcal{O}$ eines komplexen Raumes kohärent ist, ist eine analytische Garbe F auf dem Raum X genau dann kohärent, wenn eine offene Überdeckung (U_i) existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes i existieren natürliche

Zahlen p und q , so daß folgende Sequenz exakt ist:

$$S(U_1): \quad pO(U_1) \longrightarrow qO(U_1) \longrightarrow F(U_1) \longrightarrow 0.$$

Dies ist z.B. erfüllt, wenn U_1 relativkompakt in X liegt und Steinsch ist.¹⁾ Bei unseren Untersuchungen zur lokalen Künnethformel werden wir für Mannigfaltigkeiten offene Polyzylinder in komplexen Zahlenräumen betrachten, bei allgemeinen komplexen Räumen dann analytische Mengen in offenen Polyzylindern.

2.6 Wie bereits in der Einleitung vermerkt, könnte man vermuten, daß die Überlegungen von Sampson und Washnitzer in [2] für kohärente algebraische Garben mutatis mutandis auch für kohärente analytische Garben richtig sind. Daß diese rein algebraischen Überlegungen für den analytischen Fall jedoch nicht ausreichen, soll an einem einfachen Beispiel demonstriert werden.

Die Künnethformel bei Sampson Washnitzer hat die Gestalt

$$(*) \quad H(X, F) \otimes_{\mathbb{C}} H(Y, G) = H(X \times Y, F^* \otimes_{\mathcal{O}} G^*)$$

Für $X = Y = \mathbb{C}$ und $F = G = 0$ reduziert sich (*) nach Theorem B auf die Gestalt:

$$(**) \quad H^0(\mathbb{C}, 0) \otimes H^0(\mathbb{C}, 0) = H^0(\mathbb{C}_2, 0).$$

Damit läßt sich jedes $f \in H^0(\mathbb{C}_2, 0)$ schreiben in der Form

$$(***) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y)$$

¹⁾ d.h. für $U \subset\subset X$ ist $S(U)$ exakt

mit $f_i, g_i \in H^0(\mathbb{T}, 0)$. Sei nun für $f(x, y) := e^{xy}$ von allen Darstellungen der Gestalt (***) eine mit minimalem n gewählt. Wir können annehmen, daß $f_n(0) \neq 0$, denn wegen $e^0 = 1$ gilt $\sum_{i=1}^n f_i(0)g_i(y) = 1$, so daß

$$g_n(y) = - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(0)g_i(y)(f_n(0))^{-1} + (f_n(0))^{-1}$$

Durch Einsetzen in (***) erhält man

$$(***) \quad e^{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)G_i(y) + F_n(x)$$

mit folgenden Bezeichnungen: $k = (f_n(0))^{-1}$, $G_i(y) = g_i(y)$
 $F_n(x) = kf_n(x)$, $F_i(x) = f_i(x) - kf_i(0)f_n(x)$.

Daraus erhalten wir

$$F_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)G_i(0)$$

Setzen wir dies in (****) ein, ergibt sich

$$e^{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)\{G_i(y) - G_i(0)\} + 1$$

Durch Differentiation nach x erhalten wir:

$$ye^{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} F'_i(x)\{G_i(y) - G_i(0)\}$$

In der Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt hat $G_i(y) - G_i(0)$ kein konstantes Glied, daher ist sie durch y teilbar. Damit erhalten wir schließlich eine neue Darstellung

$$e^{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} F'_i(x) \frac{G_i(y) - G_i(0)}{y}$$

im Widerspruch dazu, daß die Darstellung der Gestalt (***) mit minimalem n gewählt war.

§ 3 Topologische Tensorprodukte

Vorbemerkungen: Wir verwenden hier die Theorie der topologischen Tensorprodukte in der Form, wie sie von Grothendieck entwickelt wurde (vgl. Grothendieck [1], [2], [4]; dazu die Erläuterungen in Schwartz [1], ferner die Einführung in Marinescu [1]). Alle auftretenden Vektorräume sollen komplexe (abgesehen von 3.1) lokalkonvexe topologische Vektorräume sein; ab 3.6 wird zusätzlich vorausgesetzt, daß sie hausdorffsch sind. E, F, G, H mögen Vektorräume bezeichnen. Alle Tensorprodukte dieses Paragraphen sind Tensorprodukte über $\mathbb{C}$.

3.1 Zunächst benötigen wir einige Begriffe und Resultate aus der Theorie der topologischen Vektorräume: F heißt Frechetraum, wenn F lokalkonvex, metrisierbar und vollständig ist. Statt dessen kann man auch verlangen, daß F eine vollständige Topologie hat, die durch eine abzählbare Familie von Seminormen definierbar ist. Ist E ein abgeschlossener Unterraum von F, so sind E und F/E Frecheträume (Bourbaki [7]). Ferner ist jedes abzählbare Produkt von Frecheträumen wieder ein Frechetraum (Bourbaki [7], [3]).

Sei $u: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung. Dann heißt u ein Homomorphismus (genauer: ein Homomorphismus topologischer Vektorräume), wenn die zu u gehörende Abbildung

$$[u]: E/(u^{-1}(0)) \rightarrow u(E)$$

ein Isomorphismus topologischer Vektorräume ist. Ist u stetig und linear, dann sind folgende drei Aussagen äquivalent (Bourbaki [2]):

- i) u ist ein Homomorphismus.
- ii) $u: E \rightarrow u(E)$ ist eine offene Abbildung.
- iii) u bildet jede Umgebung von 0 in E in eine

Umgebung von 0 in $u(E)$ ab.

Von großer Bedeutung für unsere Untersuchungen ist das in Bourbaki [5] chap. I §3 bewiesene

Theorem von Banach: Sind E und F vollständige, metrisierbare komplexe Vektorräume, dann ist jede stetige lineare Abbildung v von E auf F ein Homomorphismus.

Korollar 1: Ist v bijektiv, dann ist v ein Isomorphismus.

Korollar 2: Seien auf E zwei Frechettopologien gegeben. Sind diese Topologien vergleichbar, dann sind sie schon gleich.

Weiter benötigen wir das in Bourbaki [5] chap. II § 6 bewiesene

Theorem (Hahn Banach): Sei p eine Seminorm auf einem komplexen Vektorraum E , sei M ein Untervektorraum von E und f eine auf M definierte Linearform, für die auf M gilt: $|f(m)| \leq p(m)$. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf ganz E , so daß in E gilt: $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. Ist f stetig, dann kann man $\tilde{f}$ stetig wählen.

3.2 Nun sollen auf dem Tensorprodukt zweier lokalkonvexer Vektorräume auf zwei Arten Topologien eingeführt werden: die π -Topologie und die ϵ -Topologie. Von beiden sollen einige wichtige Eigenschaften bewiesen werden. Die Theorie ist besonders ergiebig, wenn beide Topologien übereinstimmen. Dies wird bei unseren Anwendungen der Fall sein.

Definition: π bezeichne die feinste lokalkonvexe Topologie auf $E \otimes F$, für die die kanonische Abbildung von $E \times F$ nach $E \otimes F$ stetig ist. $E \otimes_{\pi} F$ heißt das projektive topologische Tensorprodukt von E und F ; die Kompletterung bezeichnen wir mit $E \hat{\otimes}_{\pi} F$. Im folgenden werde unter $E \otimes F$ stets $E \otimes_{\pi} F$ verstanden, wenn

nichts anderes ausdrücklich bemerkt wird.

π läßt sich auch noch auf andere Weisen charakterisieren, durch die gleichzeitig die Existenz von π klar wird. Zur kürzeren Formulierung benutzen wir dabei folgende Bezeichnung: Sei $M \subset E$, dann bedeute $\Gamma(M)$ die konvexe zylindrische (disque, equilibre bei Borubaki, cercle bei Grothendieck) Hülle von M in E , d.h. die kleinste konvexe Menge in E , die M umfaßt und die mit x auch ρx enthält für $0 \leq \rho \leq 1$ sowie $e^{i\zeta}x$ für beliebiges reelles ζ . Jeder lokal - konvexe Vektorraum hat ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 von konvexen zylindrischen Mengen (vgl. Bourbaki [5] chap. II § 6).

Satz 1: Durchläuft U_i bzw. V_j ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 in E bzw. F , dann durchläuft $\Gamma(U_i \otimes V_j)$ ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 in $E \otimes_{\pi} F$.

Gleichzeitig mit diesem Satz beweisen wir den folgenden Satz (Schwartz [1] exp. I):

Satz 2: π läßt sich durch folgende Bedingung charakterisieren: Für jeden lokalkonvexen Vektorraum G induziert der kanonische algebraische Isomorphismus zwischen dem Raum der bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G und dem Raum der linearen Abbildungen von $E \otimes F$ in G einen algebraischen Isomorphismus zwischen dem Raum $B(E, F; G)$ der bilinearen stetigen Abbildungen und dem Raum $L(E \otimes_{\pi} F, G)$ der stetigen linearen Abbildungen.

Zusätzlich gilt: Dieser Isomorphismus läßt umkehrbar eindeutig den gleichmäßig stetigen Teilmengen bilinearer Abbildungen von $E \times F$ in G die gleichmäßig stetigen Teilmengen linearer Abbildungen von $E \otimes_{\pi} F$ in G entsprechen.

Beweis: Ist $\otimes$ eine Topologie, die den Bedingungen von Satz 2 genügt, dann ist die kanonische Abbildung

$(E \otimes F)_{\Theta} \longrightarrow (E \otimes F)_{\Theta}$ und damit $E \times F \longrightarrow (E \otimes F)_{\Theta}$ stetig. Wenn nun eine lokalkonvexe Topologie Σ existiert auf $E \otimes F$, so daß die kanonische Abbildung $E \times F \longrightarrow (E \otimes F)_{\Sigma}$ stetig ist, dann ist die identische Abbildung $(E \otimes F)_{\Theta} \longrightarrow (E \otimes F)_{\Sigma}$ stetig, d.h.

Θ ist feiner als Σ . Damit ist das Folgende gezeigt: Wenn Θ existiert, ist es gleich π und damit eindeutig bestimmt. Nun definieren aber die $\Gamma(U_i \otimes V_j)$ aus Satz 1 eine Topologie auf $E \otimes F$ (Bourbaki [5] chap. I § 1), und diese Topologie genügt nach Konstruktion den Anforderungen von Satz 2. Die behauptete Korrespondenz zwischen den gleichmäßig stetigen Teilmengen $H \subset B(E, F; G)$ und den gleichmäßig stetigen Teilmengen $\tilde{H} \subset L(E \otimes F, G)$ ist eine unmittelbare Konsequenz der Tatsachen, daß wir konvexe zylindrische Umgebungsfundamentalsysteme der 0 haben und daß die auftretenden Abbildungen konvexe Mengen in konvexe Mengen abbilden.

Wenn zwei Vektorräume E und F bezüglich einer Bilinearform $\langle , \rangle$ in einer Dualitätsbeziehung stehen (Bourbaki [6] chp IV § 1), dann versteht man unter der Polaren M° einer Menge $M \subset E$ die Menge aller $y \in F$ mit $\text{Realteil}(\langle x, y \rangle) \leq 1$ für alle $x \in M$. — Den Raum aller stetigen Linearformen auf $E \otimes F$ bezeichnen wir mit $(E \otimes F)'$. Wir können ihn mit dem Raum $B(E, F)$ der stetigen Bilinearformen auf $E \times F$ identifizieren. Da wir jede stetige Linearform stetig und linear auf die Kompletzierung fortsetzen können, gilt ein gleiches für $(E \hat{\otimes} F)'$. Aus der Korrespondenz der gleichmäßig stetigen Teilmengen ergibt sich, daß ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 in $E \otimes F$ (bzw. $E \hat{\otimes} F$) gebildet wird durch die Polaren gleichmäßig stetiger Teilmengen von $B(E, F)$ bezüglich der Dualität zwischen $B(E, F)$ und $E \otimes F$ bzw. $E \hat{\otimes} F$ (vgl. Bourbaki [6] chap IV § 2).

3.3 Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften der π -Topologie angeben.

Satz 1: Sind E und F hausdorffsch (metrisierbar), dann ist $E \otimes F$ hausdorffsch (metrisierbar).

Zum Beweise konstruiert man sich zu jedem $u \neq 0$ aus $E \otimes F$ eine stetige Bilinearform ϕ auf $E \times F$, so daß das zugehörige $\tilde{\phi}$ auf u nicht verschwindet (exp I). Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\phi}$ berührt u Null nicht. - Sind E und F metrisierbar, dann haben sie abzählbares Umgebungsfundamentalsystem der 0 und damit ist das System $\Gamma(U_i \otimes V_j)$ abzählbar, d.h. $E \otimes F$ ist metrisierbar.

Ist M eine abgeschlossene konvexe symmetrische Teilmenge von E , die 0 als inneren Punkt enthält, dann existiert genau eine Seminorm p_M auf E , die erfüllt: $M = \{x | x \in E, p_M(x) \leq 1\}$. p_M ist stetig (Bourbaki [5] chap. II § 5). p_M heißt Joch von M . So sieht man, daß die Topologie von E bzw. F sich durch eine Familie von Seminormen $(p_i)_{i \in I}$ bzw. $(q_j)_{j \in J}$ charakterisieren läßt. Wir erhalten damit auch eine weitere Beschreibung der Topologie π :

Satz 2: Seien U bzw. V konvexe zylindrische abgeschlossene Umgebungen der 0 in E bzw. F mit dem Joch p bzw. q , dann ist das Joch von $\Gamma(U \otimes V)$ gegeben durch

$$(p \otimes q)(u) = \inf_u \sum_{\mu} p(\xi_{\mu}) q(\eta_{\mu})$$

für $u = \sum \xi_{\mu} \otimes \eta_{\mu}$.

Falls p bzw. q ein Fundamentalsystem stetiger Seminormen von E bzw. F durchläuft, dann bilden die $p \otimes q$ ein Fundamentalsystem stetiger Seminormen auf $E \otimes F$. Es gilt: $(p \otimes q)(\xi \otimes \eta) = p(\xi)q(\eta)$.

Zum Beweise (exp. II) rechnet man unmittelbar nach, daß $p \otimes q$ gerade das Joch von $\Gamma(U \otimes V)$ ist. Die zweite Gleichung ergibt sich mit Hilfe des Theorems von Hahn Banach ohne Schwierigkeiten aus der ersten Beziehung.

Häufig kann man in der Theorie lokalkonvexer Vektorräume Behauptungen auf Aussagen über normierte Vek-

torräume zurückführen, so daß wir folgenden Satz angeben (exp. II), der leicht aus Satz 2 folgt:

Satz 3: Sind E und F normiert mit den Normen p und q , dann existiert auf $E \otimes F$ genau eine Norm (nämlich $p \otimes q$) mit folgender Eigenschaft: Für jeden normierten Raum G respektiert der kanonische Isomorphismus zwischen $B(E, F; G)$ und $L(E \otimes F, G)$ die Normen der Abbildungen. Die kanonische bilineare Abbildung von $(E)_p \times (F)_q$ in $(E \otimes F)_{p \otimes q}$ hat die Norm 1.

3.4 Sind für $i = 1, 2$ u_i stetige lineare Abbildungen von E_i in F_i , dann ist die Abbildung $u_1 \otimes u_2$ von $E_1 \otimes E_2$ in $F_1 \otimes F_2$ π -stetig; sind alle Räume normiert, dann gilt $\|u_1 \otimes u_2\| = \|u_1\| \|u_2\|$. Dies resultiert aus den Eigenschaften der folgenden bilinearen Abbildung χ auf $E_1 \times E_2$: $\chi(x, y) = u_1(x) \otimes u_2(y)$. $u_1 \otimes u_2$ läßt sich kanonisch zu einer stetigen linearen Abbildung $u_1 \hat{\otimes} u_2: E_1 \hat{\otimes} E_2 \rightarrow F_1 \hat{\otimes} F_2$ fortsetzen. Sind die u_i Epimorphismen, dann ist auch $u_1 \otimes u_2$ ein Epimorphismus. Denn das Bild einer Umgebung $\Gamma(U_1 \otimes U_2)$ unter $u_1 \otimes u_2$ ist $\Gamma(u_1(U_1) \otimes u_2(U_2))$, dies ist nach Voraussetzung über die u_i eine Umgebung der 0 in $F_1 \otimes F_2$. Im Allgemeinen ist jedoch $u_1 \hat{\otimes} u_2$ ein Epimorphismus, aus Bourbaki [3] § 3, Kor. 3 zu Satz 4 folgt aber:

Satz: Sind für $i = 1, 2$ u_i Epimorphismen von E_i auf F_i und sind die E_i metrisierbar, dann ist $u_1 \hat{\otimes} u_2$ ein Epimorphismus.

Alle Elemente $u \in E \otimes F$ haben eine endliche Darstellung der Gestalt $u = \sum_k e_k \otimes f_k$. Für den Fall, daß E und F Frecheträume sind, lassen sich alle Elemente aus $E \hat{\otimes} F$ durch derartige endliche Summen "approximieren" (Grothendieck [1] § 2 Theorem 1):

Theorem: Wenn E und F Frecheträume sind, hat jedes $u \in E \otimes F$ eine Darstellung der Form

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v x_v \otimes y_v$$

wobei x_v eine Nullfolge aus E , y_v eine Nullfolge aus F und $\sum_{v=1}^{\infty} |\lambda_v| < \infty$.

Der diffizile Beweis des Theorems stützt sich auf funktionalanalytische Methoden, die in unseren Untersuchungen nicht weiter auftauchen und die wegen ihres Umfanges hier nicht entwickelt werden können (Schwartz [1] exp. III - VI).

3.5 Aus einem vorgegebenen lokalkonvexen Hausdorffraum E kann man auf zwei Weisen normierte Vektorräume konstruieren:

i) Sei U eine konvexe zylindrische Umgebung der 0 und sei p das Joch von U . Versieht man E mit der einzigen Seminorm p , dann ist p nicht mehr hausdorffsch, wenn p keine Norm ist. Der Quotient von E nach dem Unterraum der Elemente, auf denen p verschwindet, versehen mit der Quotientennorm, ist der normierte Raum E_U . Es existiert eine kanonische stetige Epijektion von E auf E_U und man sieht unmittelbar

Behauptung 1: Ist $\chi: E \rightarrow N$ eine stetige Epijektion eines Hausdorffraumes E auf einen normierten Vektorraum N , dann existiert ein U , so daß χ faktorisiert werden kann in der Form $E \rightarrow E_U \rightarrow N$, wobei $E_U \rightarrow N$ eine Isometrie ist.

ii) Sei B eine beschränkte konvexe zylindrische Teilmenge von E , die jede Gerade durch 0 in einer abgeschlossenen Strecke (eventuell nur in 0) schneidet. Dann bezeichnet E_B den von B erzeugten Unterraum von E , versehen mit dem Joch von B als Norm. B ist die abgeschlossene Einheitskugel von E_B und die kanonische

$E_B \rightarrow E$ ist stetig. Man sieht sofort:

Behauptung 2: Sei $N \rightarrow E$ eine stetige Injektion eines normierten Raumes in einen Hausdorffraum, dann existiert eine beschränkte Menge B , so daß die Injektion sich faktorisieren läßt in $N \rightarrow E_B \rightarrow E$, dabei ist $N \rightarrow E_B$ surjektiv und eine Isometrie.

Eine beschränkte Teilmenge $B \subset E$ heißt komplettierend, wenn B konvex und zylindrisch ist, jede Gerade durch 0 in einer abgeschlossenen Strecke schneidet und wenn E_B vollständig ist (damit ein Banachraum). B ist offenbar in allen Topologien auf E komplettierend, in denen es beschränkt ist, wenn es in einer komplettierend ist. Es gilt folgende einfache (Schwartz [2])

Behauptung 3: Jede beschränkte konvexe zylindrische vollständige Teilmenge $B \subset E$ ist komplettierend.

Im folgenden benötigen wir noch ein Ergebnis über die Vertauschbarkeit der Produktbildung mit der Kompletterung von Tensorprodukten (Grothendieck [1], chap. I § 1 Nr. 3 Satz 6):

Satz: Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von (nicht notwendig hausdorffschen) Vektorräumen. Dann gilt:

$$(\Pi_i E_i) \hat{\otimes} F = \Pi_i (E_i \hat{\otimes} F).$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Vergleich der beiden dichten Unterräume $(\sum_i E_i) \otimes F$ und $\sum_i (E_i \otimes F)$ (Bourbaki [5] chap. I § 1,7), die algebraisch kanonisch isomorph sind und deren induzierte Topologien übereinstimmen (vgl. 3.2 Satz 1).

3.6 Nun wollen wir die zweite Topologie auf dem Tensorprodukt einführen, die induktive Tensorprodukttopologie ϵ . Wir gehen dabei vor nach Schwartz [1] exp. VII. Im ganezn folgenden Paragraphen seien alle Vektorräume hausdorffsch!

Es bezeichne $B(E, F)$ den Raum der partiell stetigen Bilinearformen auf $E \times F$. Analog zur Konstruktion der S -Konvergenz in Räumen linearer Abbildungen kann man auf $B(E, F)$ eine S_1, S_2 -Topologie definieren, wobei S_1 bzw. S_2 eine Menge von beschränkten Teilmengen in E bzw. F ist. Man erhält auf $B(E, F)$ eine topologische Vektorraumstruktur genau dann, wenn jede partiell stetige Bilinearform beschränkt ist auf jedem Produkt der Gestalt $A \times B$ mit $A \in S_1$ und $B \in S_2$.

Satz: Ist $A \subset E$ beschränkt und $B \subset F$ beschränkt und komplettierend, dann ist jedes $\chi \in B(E, F)$ beschränkt auf $A \times B$.

Zum Beweise können wir annehmen, daß A konvex, zylindrisch und abgeschlossen ist. χ ist partiell stetig auf $E_A \times F_B$. Nach dem Theorem von Baire (Bourbaki [6] chap. III § 4, 1 Satz 2) ist χ sogar stetig, damit beschränkt auf dem Produkt der Einheitskugeln.

Die Topologie der schwachen Konvergenz auf E' bzw. F' werde mit E'_0 bzw. F'_0 bezeichnet. Jede gleichmäßig stetige konvexe zylindrische schwach abgeschlossene Teilmenge von E' ist schwach kompakt (Bourbaki [6], IV § 2 Theorem 1), damit ist sie schwach vollständig und nach 3.5 Behauptung 3 komplettierend. Da diese Mengen ein Fundamentalsystem gleichmäßig stetiger Teilmengen von E' bilden, kann man $B(E'_0, F'_0)$ mit der Topologie ε der gleichmäßigen Konvergenz auf den Produkten $A' \times B'$ versehen, wobei $A' \subset E'$ und $B' \subset F'$ gleichmäßig stetig. Wir schreiben dann $B_\varepsilon(E'_0, F'_0)$. Den algebraischen Vektorraum $E \otimes F$ kann man kanonisch als Teilmenge von dem Raum $B(E'_0, F'_0)$ auffassen: Jedes $\sum_i x_i \otimes y_i$ definiert eine Bilinearform durch $(x', y') \rightarrow \sum_i \langle x', x_i \rangle \langle y', y_i \rangle$, die schwach partiell stetig ist. Zwei verschiedene Elemente liefern verschiedene Bilinearformen, so daß wir als induktive Tensorprodukttopologie ε die von $B_\varepsilon(E'_0, F'_0)$

auf $E \otimes F$ induzierte Topologie bezeichnen. Die Kompletttierung von $E \otimes_{\epsilon} F$ schreiben wir $E \hat{\otimes}_{\epsilon} F$.

Die beiden Topologien π und ϵ sollen nun miteinander verglichen werden: Ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 in $E \otimes_{\pi} F$ erhält man durch die Polaren gleichmäßig stetiger Teilmengen in $B(E, F)$. Ein Umgebungsfundamentalsystem der 0 in $E \otimes_{\epsilon} F$ ergibt sich aus den Polaren von Mengen der Gestalt $A' \otimes B' \subset B(E, F)$ mit A' bzw. B' gleichmäßig stetig in E' bzw. F' . Da $A' \otimes B'$ gleichmäßig stetig in $B(E, F)$ ist, ist π feiner als ϵ . Von besonderer Bedeutung sind die Räume, für die beide Topologien gleich sind:

Definition: Ein lokalkonvexer Hausdorffraum E heißt nuklearer Raum, wenn für jeden lokalkonvexen Hausdorffraum F gilt: $E \otimes_{\pi} F = E \otimes_{\epsilon} F$.

Es ist trivial, daß jeder endlichdimensionale Hausdorffraum nuklear ist.

3.7 Die Topologie ϵ läßt sich durch Seminormen beschreiben (Marinescu [1], chap. III § 3,9): Bezeichnet man die Seminormen auf E mit $\|\cdot\|_{\alpha}$ und die auf F mit $\|\cdot\|_{\beta}$ dann beschreibt sich ϵ durch die Seminormen

$$\|\sum_n e_n \otimes f_n\|_{\alpha, \beta} = \sup_{\|\varphi\|_{\alpha}, \|\psi\|_{\beta} \leq 1} |\sum_n \langle e_n, \varphi \rangle \langle f_n, \psi \rangle|$$

Sind $v_i: E_i \rightarrow F_i$ stetig, $i = 1, 2$ dann ist auch $v_1 \otimes_{\epsilon} v_2: E_1 \otimes_{\epsilon} E_2 \rightarrow F_1 \otimes_{\epsilon} F_2$ stetig.

Satz 1: Sind $v_i: E_i \rightarrow F_i$ Monomorphismen, dann ist $v_1 \otimes_{\epsilon} v_2$ ein Monomorphismus, d.h. sind E_i topologische Untervektorräume von F_i , dann wird die ϵ -Topologie auf $E_1 \otimes E_2$ induziert von der ϵ -Topologie auf $F_1 \otimes F_2$.

Der Beweis (exp. VII) beruht darauf, daß das Bild unter $F_i \rightarrow E_i$ einer gleichmäßig stetigen Menge wieder

gleichmäßig stetig ist und daß nach dem Theorem von Hahn Banach jede gleichmäßig stetige Teilmenge von E' sich als Bild einer gleichmäßig stetigen Teilmenge von F' schreiben läßt.

Satz 2: Sei $0 \longrightarrow E \xrightarrow{\sigma} F \xrightarrow{\tau} G \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz und seien σ, τ Homomorphismen. Sei H ein nuklearer Raum, dann ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow E \hat{\otimes} H \longrightarrow F \hat{\otimes} H \longrightarrow G \hat{\otimes} H \longrightarrow 0$$

falls E und F Frecheträume sind.

Beweis: Da nach Voraussetzung die beiden Topologien π und ϵ übereinstimmen, ist die Sequenz nach Satz 1 an der ersten Stelle exakt; nach 3.4 Satz ist sie an der letzten Stelle exakt; schließlich gilt $(F \hat{\otimes} H) / (E \hat{\otimes} H) = G \hat{\otimes} H$.

Satz 3: Sind E und F Frecheträume, von denen einer nuklear ist, sind auf E und F Differentialoperatoren δ' und δ'' gegeben, die Homomorphismen topologischer Vektorräume sind, dann gilt $H(E \hat{\otimes} F) = H(E) \hat{\otimes} H(F)$.

Der Beweis für diese Künnethformel topologischer Vektorräume (exp. XXIV) verläuft analog dem in 1.5; man betrachte statt der algebraischen Tensorprodukte die topologischen komplettierten Tensorprodukte. Zunächst hat man ein universelles Koeffiziententheorem analog 1.3, zu dessen Beweis man benutzt, daß jeder Unterraum eines nuklearen Raumes und jeder Quotientenraum nach einem abgeschlossenen Unterraum nuklear ist (vgl. 3.14). Damit ist $Z(E)$ usw. ein nuklearer Raum, ebenso $B(E)$; da δ' ein Homomorphismus von Frecheträumen ist, ist $B(E)$ abgeschlossen und somit $H(E)$ nuklear usw. Das wesentliche Hilfsmittel ist Satz 2. Der weitere Teil des Beweises überträgt sich ohne weiteres.

3.8 Zu zeigen ist also noch:

- i) Jeder Unterraum eines nuklearen Raumes ist nuklear.
- ii) Jeder Quotientenraum eines nuklearen Raumes nach

einem abgeschlossenen Unterraum ist nuklear.

iii) Jedes Produkt nuklearer Räume ist nuklear.

iv) E ist nuklear genau dann, wenn $\hat{E}$ nuklear ist.

v) Sind E und F nuklear, dann ist $E \hat{\otimes} F$ nuklear.

Davon sind iv) und v) trivial:

Zu iv) $E \hat{\otimes}_{\Pi} F = \hat{E} \hat{\otimes}_{\Pi} F$ und $E \hat{\otimes}_{\epsilon} F = \hat{E} \hat{\otimes}_{\epsilon} F$.

Zu v) Die Einführung mehrfacher topologischer Tensorprodukte ist kanonisch. Die Bildung der Topologien ist assoziativ, so daß gilt:

$$(E \otimes F) \otimes_{\epsilon} G = E \otimes_{\epsilon} (F \otimes_{\epsilon} G) = E \otimes_{\Pi} (F \otimes_{\Pi} G) = (E \otimes F) \otimes_{\Pi} G.$$

Zum Beweise der anderen drei Behauptungen benötigen wir genauere Untersuchungen des dualen Raumes zu $E \otimes_{\epsilon} F$.

Wir bezeichnen ihn mit $J(E, F)$, und er ist gerade der Raum aller integralen Bilinearformen, dh. aller Bilinearformen auf $E \times F$, deren zugehörige Linearform auf $E \otimes_{\epsilon} F$ stetig ist. Man hat $J(E, F) \subset B(E, F)$.

Bezeichnen wir mit E'_{τ} die Mackey-Topologie auf E' ($\tau(E', E)$ bei Bourbaki [6] chap. IV § 2), mit $L_{\epsilon}(E'_{\tau}, F)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von E'_{τ} in F , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichmäßig stetigen Teilen von E' , dann gilt

Lemma: $E \otimes_{\epsilon} F$ ist der topologische Unterraum aller schwach stetigen linearen Abbildungen von endlichem Rang in $L_{\epsilon}(F'_{\tau}, E)$.

Die Einbettung (exp. VIII) ergibt sich folgendermaßen: Einem Element $\sum_n e_n \otimes f_n$ entspricht die lineare Abbildung $\Psi: f' \rightarrow \sum_n \langle f', f_n \rangle x_n$, die schwach stetig und von endlichem Rang ist. Zum Beweis der umgekehrten Richtung nehme man sich ein Ψ mit $\Psi(F')$ endlichdimensional, zu diesem Raum eine Basis e_k , mit deren Hilfe man sich leicht ein $\sum_k e_k \otimes f_k$ konstruiert, das Ψ induziert.

Bemerkung: Da $L_{\epsilon}(F'_{\tau}, E)$ genau dann vollständig ist, wenn E und F vollständig sind (exp. VIII), ist für voll-

ständiges E und $F = E \hat{\otimes}_\epsilon F$ ein Unterraum von $L_\epsilon(F', E)$.

3.9 Bezeichnet $L_b(G_\tau, H)$ den Raum der linearen stetigen Abbildungen von G_τ in H versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Teilmengen, dann gilt

Hilfssatz: Sind G und H vollständig, dann existiert eine stetige Fortsetzung $\varphi: G'_b \hat{\otimes}_\pi H \rightarrow L_b(G_\tau, H)$ der Identität auf $G'_b \otimes H$.

Zum Beweise überlegt man sich, daß die auf $G'_b \otimes H$ von $L_b(G_\tau, H)$ induzierte Topologie identisch mit der Topologie $G'_b \otimes_\epsilon F$ ist, vgl. exp. XII. Dann folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß π feiner ist als ϵ und aus 3.8 Bemerkung zum Lemma.

Im folgenden werde unter $E \otimes F$ wieder stets das projektive topologische Tensorprodukt verstanden. Sind E und F Banachräume, dann verstehen wir unter $L^1(E, F)$ den Unterraum $\varphi(E' \hat{\otimes} F)$ von $L(E, F)$. Die Elemente von $L^1(E, F)$ heißen nukleare Operatoren oder Fredholmoperatoren. $L^1(E, F)$ ist ein Quotientenraum von $E' \hat{\otimes} F$. Die Quotientennorm von π heißt nukleare Norm und wird geschrieben $\| \cdot \|_1$. Jeder nukleare Operator u gestattet nach 3.4 Theorem eine Darstellung der Gestalt

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e'_k \otimes f_k$$

mit $\|e'_k\| \leq 1$, $\|f_k\| \leq 1$, $\sum |\lambda_k| < \infty$. Das Infimum über $\sum |\lambda_k|$ über alle Darstellungen von u entspricht $\|u\|_1$.

3.10 Nun soll der Begriff der nuklearen Operatoren auf beliebige lokalkonvexe Hausdorffräume übertragen werden:

Definition: Eine lineare Abbildung u heißt nuklear, wenn zu $u: E \rightarrow F$ zwei Banachräume E_1 und F_1 existieren, ferner ein nuklearer Operator $\beta: E_1 \rightarrow F_1$, zwei stetige

Abbildungen $\alpha: E \rightarrow E_1$ und $\gamma: F_1 \rightarrow F$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \gamma \\ E_1 & \xrightarrow{\beta} & F_1 \end{array}$$

Es genügt übrigens, anzunehmen, daß E_1 normiert ist, denn man kann β dann auf $\hat{E}_1$ fortsetzen. Ersetzt man E_1 durch $\alpha(E)$ und F_1 durch $F_1/\gamma^{-1}(0)$, dann sieht man, daß man α als surjektiv und γ als injektiv annehmen kann. Aus 3.5 wissen wir, daß E_1 dann isomorph ist zu E_U für eine offene konvexe zylindrische Menge $U \subset E$ und daß F_1 isomorph ist zu F_B für eine komplettierende Teilmenge $B \subset F$. Setzen wir $A' := U^*$, dann ist E'_A , das Dual von E_U und β kommt somit von einem β_0 aus $E'_A \hat{\otimes} F_B$ her; bezeichnet t_φ die Transponierte einer Abbildung φ , dann kommt u von einem u_0 aus $E' \hat{\otimes} F$ mit $u_0 = (t_{\alpha \otimes \gamma})(\beta_0)$, dabei ist $t_{\alpha \otimes \gamma}$ die kanonische Abbildung von $E'_A \hat{\otimes} F_B$ in $E' \hat{\otimes} F$. Damit kommt u schon von einem $u_0 \in E'_A \hat{\otimes} F_B$ wobei man zusätzlich (exp. V) annehmen kann, daß u_0 zu einer Menge der Gestalt $\Gamma(C' \otimes D)$ gehört mit C' und B kompakt in E'_A , und F_B . Zusammengefaßt gilt:

Satz 1: Ein Operator $u: E \rightarrow F$ ist nuklear genau dann, wenn er durch ein Element eines $E'_A \hat{\otimes} F_B$ definiert wird, wobei A' und B konvex zylindrisch und kompakt sind (damit komplettierend).

Somit kann man annehmen, daß das Bild unter α und γ einer Kugel relativkompakt ist.

Da E'_A , das Dual ist zu E_{A^*} , hat man zwei kanonische stetige Abbildungen $E'_A \hat{\otimes} F_B \rightarrow L_b(E_{A^*}, F_B) \rightarrow L_b(E, F)$ und zu jeder Zerlegung $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i$ für $u \in E'_A \hat{\otimes} F_B$ hat man eine entsprechende Zerlegung des Bildes in $L_b(E, F)$. Ist umgekehrt $\sum |\lambda_i| < \infty$, x'_i eine gleich -

mäßig stetige Folge und (y_i) in einer komplettierenden Teilmenge von F enthalten, dann konvergiert $\sum \lambda_i x_i' \otimes y_i$ in $L_b(E, F)$ und stellt einen nuklearen Operator dar. Damit können wir folgenden Satz formulieren (exp. XII):

Satz 2: u ist nuklear genau dann, wenn u von der Form ist $u = \sum \lambda_i x_i' \otimes y_i$ mit $\sum |\lambda_i| < \infty$, (x_i') gleichmäßig stetige Folge und (y_i) enthalten in einer komplettierenden Teilmenge.

Marinescu benützt in [1] diese Eigenschaft zur Definition nuklearer Operatoren.

Satz 3: Seien $\rho: A \rightarrow B$ und $\tau: C \rightarrow D$ stetig und linear. Dann ist mit $\sigma: B \rightarrow C$ auch $\tau \circ \sigma \circ \rho$ ein nuklearer Operator.

Der Beweis (exp. XII) ergibt sich leicht aus dem Fall, daß alle Räume normiert sind; diesen rechnet man unmittelbar nach.

Korollar: u bleibt nuklear, wenn man die Topologie von E verfeinert oder die von F vergrößert. Ist E_1 ein Unterraum von E und F ein Unterraum von F_1 , dann ist die zu u gehörige Abbildung von E_1 in F_1 nuklear.

Satz 4: Sei $E \subset F$ und $u: E \rightarrow G$ nuklear. Dann existiert eine nukleare Fortsetzung $v: F \rightarrow G$ von u .

Zum Beweis (exp. XII) stellt man sich u dar in der Form $\sum \lambda_i y_i' \otimes z_i$ und setzt nach Hahn Banach die y_i' simultan zu gleichmäßig stetigen $\bar{y}_i'$ auf F fort; man hat die gesuchte Fortsetzung mit $v = \sum \lambda_i \bar{y}_i' \otimes z_i$.

3.11 Nun soll der Raum der bilinearen Integralformen näher untersucht werden (exp. XVI). In dieser Nummer mögen E und F Banachräume bezeichnen. Wir versehen den Raum $J(E, F)$ (vgl. 3.8) mit der Norm $\| \cdot \|_J$, der dualen Norm zur Norm auf $E \hat{\otimes}_c F$. Damit hat sie die Gestalt

$$\|\sigma\|_J = \sup_{\|u\|_E \leq 1} |\sigma(u)|$$

Satz 1: Ist E_1 ein Unterraum von E und F_1 ein Unterraum von F , dann läßt sich jede integrale Bilinearform auf $E_1 \times F_1$ fortsetzen zu einer integralen Bilinearform auf $E \times F$ von gleicher integraler Norm.

Denn die Norm ϵ auf $E_1 \otimes E_2$ wird induziert von der Norm ϵ auf $E \otimes F$, woraus mit Hahn Banach leicht die Behauptung folgt.

Definition: Ein Element u aus $L(E, F)$ heist integraler Operator, wenn die zu u gehörige Bilinearform v auf $E \times F'$ $v(x, y') = \langle u(x), y' \rangle$ integral ist. Wir setzen $\|u\|_{\text{int}} = \|v\|_J$.

Bemerkung: Jeder nukleare Operator ist integral. Zum Beweis rechnet man die Stetigkeit der zugehörigen Bilinearform auf dem induktiven Tensorprodukt direkt nach (Marinescu [1] chap. III, § 4). Ferner gilt für integrale Operatoren wie für die nuklearen, daß jede Komposition eines integralen Operators mit einer stetigen linearen Abbildung wieder integral ist (vgl. Marinescu [1] chap. III § 4).

3.12 Seien E und F nun wieder lokalkonvex. Wir wissen bereits, daß $J(E, F) \subset B(E, F)$. Genauer gilt:

Satz 1: $J(E, F)$ ist derjenige Unterraum von $B(E, F)$, den man als Vereinigung der konvexen zylindrischen, bezüglich $\sigma(B(E, F), E \otimes F)$ abgeschlossenen Hüllen der Produkte $A' \otimes B'$ erhält, wobei $A' \subset E'$ und $B' \subset F'$ gleichmäßig stetige Teilmengen sind.

Beweis (exp. VII): Ein $\chi \in B(E, F)$ liegt in $J(E, F)$ genau dann, wenn es in einer Polaren einer Umgebung von 0 in $E \otimes_\epsilon F$ liegt, d.h. in einer Bipolaren der Gestalt $(A' \otimes B')''$. Da $J(E, F)$ das Dual von $E \otimes_\epsilon F$ ist, bilden die Mengen der Gestalt $(A' \otimes B')''$

ein Fundamentalsystem gleichmäßig stetiger Teilmengen von $J(E, F)$.

Satz 2: Eine Bilinearform χ auf $E \times F$ ist integral genau dann, wenn χ sich schreiben läßt in der Form

$$\int_{A' \times B'} (x' \otimes y') d\mu(x', y')$$

wobei A' bzw. B' eine gleichmäßig stetige schwach abgeschlossene Teilmenge von E' bzw. F' ist, μ ein Radonmaß auf dem schwach kompakten $A' \times B'$ und das Integral im Sinne der einfachen Konvergenz auf $E \times F$ zu verstehen ist.

Die Notation ist folgendermaßen gemeint:

$$\chi(x, y) = \int_{A' \times B'} \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle d\mu(x', y')$$

Dann ist der Satz 2 eine einfache Konsequenz aus Satz 1: (Bourbaki [9], chap. III §§ 4, 5) Ein Punkt eines topologischen Vektorraums gehört genau dann zur konvexen zylindrischen abgeschlossenen Hülle eines Kompaktums, wenn er Massenzentrum eines Radonmaßes von der absoluten Masse ≤ 1 auf diesem Kompaktum ist.

Dieser Satz gestattet es, in vernünftigen Sinne sagen zu können, daß eine integrale Bilinearform auf $E \times F$ herrührt von einer integralen Bilinearform auf einem geeignet gewählten $E_U \times F_V$, wobei in der Bezeichnung von Satz 2 $U = A'$ und $V = B'$ offene zylindrische konvexe Umgebungen der 0 in E bzw. F sind. Damit hat man eine Reduktion der Theorie der integralen Bilinearformen lokalkonvexer Räume auf die normierten Räume. Da aber eine Bilinearform auf $E \times F$ integral ist genau dann, wenn die kanonische Fortsetzung auf $\hat{E} \times \hat{F}$ integral ist, genügt es, sich auf Banachräume zu beschränken.

Ein Element aus $L(E, F)$ heißt integrale Abbildung, wenn die zugehörige Bilinearform auf $E \times F'_b$ integral ist (b bezeichne das starke Dual).

Ähnlich wie bei nuklearen Abbildungen existiert für integrale Abbildungen eine Faktorisierung der Form

$$E \longrightarrow E_U \longrightarrow F_B \longrightarrow F$$

wobei U eine konvexe zylindrische offene Umgebung der 0 in E ist (in den Bezeichnungen von Satz 2 ist $U = A''$ wählbar, vgl. Grothendieck [1] S. 130) und B eine beschränkte konvexe zylindrische Teilmenge von F ist (denn eine gleichmäßig stetige Teilmenge von F'' , Dual von F'_b , ist in der schwachen Berührmenge $\bar{B}$ in F'' einer beschränkten konvexen zylindrischen abgeschlossenen Teilmenge B in F enthalten).

Ist $u: E \longrightarrow F$ integral, dann ist trivialerweise die Fortsetzung von $\hat{E}$ nach $\hat{F}$ integral. Andererseits sieht man leicht: Ist u eine stetige Abbildung und $\hat{u}$ integral, dann ist u integral, wenn jede beschränkte Menge von $\hat{F}$ in der Berührmenge einer beschränkten Menge von F enthalten ist (etwa wenn F normiert ist). — Man rechnet unmittelbar nach, daß ein Operator u integral (nuklear) genau dann ist, wenn der zugehörige transponierte Operator integral (nuklear) ist (Marinescu [1], S. 128).

Aus der Theorie der Hilberträume benötigen wir folgenden Satz (dessen funktionalanalytischer Beweis sich in exp. XIII und exp. XVI findet, den wir hier wegen seines Umfanges nicht reproduzieren können):

Satz 3: Seien E und F Banachräume, dann läßt sich jede integrale Abbildung der integralen Norm ≤ 1 faktorisieren in der Gestalt $E \longrightarrow H \longrightarrow F$, wobei H ein Hilbertraum ist. Sind E und F selber Hilberträume, dann ist jede integrale Abbildung schon nuklear.

Satz 4: Die Komposition dreier integraler Operatoren ist nuklear.

Beweis (exp. XVI): Wir können die Abbildungen $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$ faktorisieren in der Form

$A \longrightarrow H_1 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow H_2 \longrightarrow D$, wobei H_1 und H_2 hilbertsch sind. Da $B \longrightarrow C$ nach Voraussetzung integral, ist (vgl. 3.11) $H_1 \longrightarrow H_2$ integral und damit nuklear; aus 3.10 Satz 3 folgt dann die Behauptung.

3.13 Theorem: E sei hausdorffsch und lokalkonvex. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) E ist nuklear.
- ii) Zu jedem konvexen zylindrischen gleichmäßig stetigen schwach abgeschlossenen Teil $A' \subset E'$ existiert eine Teilmenge B' mit gleichen Eigenschaften, die A' umfaßt und für die die kanonische Abbildung von E'_A nach E'_B nuklear ist.
- iii) Zu jeder offenen konvexen zylindrischen Umgebung U von 0 in E existiert eine Umgebung V mit gleichen Eigenschaften, die in U enthalten ist, so daß die kanonische Abbildung von $\hat{E}_V$ nach $\hat{E}_U$ nuklear ist.

Beweis: (vgl. exp. XVII) Aus i) folgt ii). Sei u eine ϵ -beschränkte Abbildung eines Banachraumes F nach E' , d.h. es existiert eine Umgebung der 0 in F , die in eine gleichmäßig stetige Teilmenge in E' abgebildet wird. u definiert kanonisch eine stetige Bilinearform χ auf $E \times F$ durch $\chi(e, f) = \langle e, u(f) \rangle$. χ ist integral, damit ist nach Definition u integral. Ist nun A' eine konvexe zylindrische gleichmäßig stetige schwach abgeschlossene Teilmenge von E' , dann ist die kanonische Abbildung von E'_A nach E' ϵ -beschränkt und somit integral. Sie definiert eine integrale Bilinearform auf $E'_A \times E$, diese kommt von einer integralen Bilinearform auf $E'_A \times E_U$ für eine passend gewählte Umgebung U der 0 in E . Nach dem in 3.12 Ausgeführten kann man annehmen, daß U in A'' liegt; somit erhält man eine integrale Abbildung $E'_A \longrightarrow E'_U$, wobei nach Konstruktion U' zylindrisch, konvex, gleichmäßig stetig und schwach abgeschlossen.

Wiederholt man dies Verfahren, dann folgt Aussage ii) aus der Tatsache, daß die Komposition dreier integrierender Operatoren ein nuklearer Operator ist.

Aus ii) folgt i): Sei F ein Banachraum, dann genügt es, wie der anschließend bewiesene Satz beweist, nachzuweisen, daß $E \otimes_{\epsilon} F = E \otimes_{\pi} F$. Beim Übergang zum Dualen zeigt sich, daß dies äquivalent ist mit Nachweis, daß jede gleichmäßig stetige Teilmenge von $B(E, F)$ eine gleichmäßig stetige Teilmenge von $J(E, F)$ ist. Eine gleichmäßig stetige Teilmenge $H \subset B(E, F)$ kommt von einer gleichmäßig stetigen Menge von Bilinearformen auf einem $F \times E_U$ und liefert damit eine ϵ -gleichmäßig beschränkte Menge von Abbildungen $u_k: F \rightarrow E'$, die sich in folgender Weise faktorisieren: $F \xrightarrow{v_k} E'_U \xrightarrow{\alpha} E'$ wobei die v_k gleichmäßig stetig sind. Nach Voraussetzung kann man α faktorisieren zu $E'_U \xrightarrow{\beta} E'_B \xrightarrow{\gamma} E'$, wobei die erste Abbildung nuklear ist. Das liefert insgesamt eine Zerlegung der $u_k: F \xrightarrow{\beta \cdot v_k} E'_B \xrightarrow{\gamma} E'$, in der die erste Abbildung nuklear ist. Setzen wir $V := B''$, dann kommt H von einer gleichmäßig stetigen Menge in $J(E_V, F)$, so daß H gleichmäßig stetig in $J(E, F)$.

ii) und iii) sind äquivalent: Ersetzt man in ii) die Bedingung " $E'_A \rightarrow E'_B$, nuklear" durch die Bedingung " $E'_A \rightarrow E'_B$, integral", dann erhält man eine Aussage ii)', die äquivalent ist zu ii). Man hat eine Äquivalenz zu Aussage iii)', die aus iii) entsteht, in dem man " $\hat{E}_U \rightarrow \hat{E}_V$ nuklear" ersetzt durch die Aussage " $E_U \rightarrow E_V$ integral"; iii)' ist offensichtlich zu iii) äquivalent. q. e. d.

Wir haben zum Beweise noch folgenden Satz benutzt: (exp. XVII)

Satz: Ein lokalkonvexer Raum E ist genau dann nuklear, wenn für jeden Banachraum F die beiden Topologien

π und ϵ übereinstimmen.

Die Bedingung ist hinreichend: Sei F ein lokalkonvexer Raum. Die zu beweisende Aussage: $E \otimes_{\pi} F = E \otimes_{\epsilon} F$ ist aus Dualitätsgründen äquivalent damit, daß jeder gleichmäßig stetige Teil $H \subset B(E, F)$ eine gleichmäßig stetige Teilmenge von $J(E, F)$ ist. H wird erzeugt von einer Familie Θ von gleichmäßig stetigen Bilinearformen auf einem $E \times F_V$ (V konvexe zylindrische offene Umgebung der 0 in F). Θ definiert eine gleichmäßig stetige Teilmenge H' in $B(E, F_V) = B(E, \hat{F}_V)$. Nach Voraussetzung gilt: $H' \subset J(E, \hat{F}_V) = J(E, F_V)$. Damit definiert Θ auch eine Familie gleichmäßig stetiger Bilinearformen auf $J(E, F)$.

3.14 Nun können wir die benötigten Permanenzsätze beweisen (exp. XVIII). Nennen wir eine Abbildung polynuklear, wenn sie aus wenigstens zwei nuklearen Operatoren zusammengesetzt ist, dann gilt:

Satz 1: Ist $u: E \rightarrow F$ polynuklear und $u(E)$ in einem vollständigen Unterraum F_1 von F enthalten, dann ist die zugehörige Abbildung von E nach F_1 nuklear.

Beweis: Nach Voraussetzung kann man mit zwei nuklearen Abbildungen faktorisieren: $E \xrightarrow{v} G \rightarrow F$. Da jeder nukleare Operator integral ist, kann man weiter zerlegen in $E \xrightarrow{v} G \rightarrow H \rightarrow \hat{F}$ wobei H ein Hilbertraum ist, ferner $E \rightarrow H$ nuklear ist. $v(E)$ ist ein Unterraum H_1 von H . Da $\bar{H}_1$ in F_1 abgebildet wird, erhält man $E \rightarrow \bar{H}_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F$. Nun ist $\bar{H}_1$ direkter Faktor von H (Bourbaki [6] chap. V § 1,5), damit ist die Abbildung $E \rightarrow \bar{H}_1$ nuklear, woraus die Behauptung folgt.

Satz 2: Sei E vollständig. Ist $u: E \rightarrow F$ polynuklear, bildet weiter u einen abgeschlossenen Unterraum E_1 von E

auf 0 ab, dann ist die zugehörige Quotientenabbildung $E/E_1 \rightarrow F$ nuklear.

Beweis: Wir faktorisieren in $E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F$, wobei G vollständig und H hilbertsch ist. Daraus ergibt sich $E \rightarrow H \rightarrow F$ mit $H \rightarrow F$ nuklear. $\bar{H}_1 = \overline{u(E_1)}$ wird auf 0 abgebildet, so daß E/E_1 in $H/\bar{H}_1$ abgebildet wird und wir folgende Faktorisierung erhalten: $E \rightarrow E/E_1 \rightarrow H/H_1 \rightarrow F$. Da $\bar{H}_1$ direkter Faktor von H ist, ist die Abbildung $H/\bar{H}_1 \rightarrow F$ nuklear als Beschränkung der nuklearen Abbildung $H \rightarrow F$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 3: Ist E nuklear, dann ist jeder Untervektorraum F nuklear.

Beweis: Jede Umgebung U in F läßt sich in der Form schreiben $U = W \cap F$, wobei W eine Umgebung in E ist. Da E nuklear ist, existiert eine Umgebung Z in E mit $Z \subset W$ und $\hat{E}_Z \rightarrow \hat{E}_W$ ist polynuklear. Mit $V = Z \cap F$ hat man eine polynukleare Abbildung $\hat{F}_V \rightarrow \hat{E}_Z \rightarrow \hat{E}_W$, ferner liegt das Bild von $\hat{F}_V$ in $\hat{F}_U$. Damit ist die Abbildung $\hat{F}_V \rightarrow \hat{F}_U$ nach Satz 1 nuklear und nach 3.13 Theorem ist damit F nuklear.

Satz 4: Ist E nuklear, dann ist jeder Quotient E/F nach einem abgeschlossenen Unterraum F nuklear.

Beweis: Sei U eine bezüglich F saturiert Umgebung in E und $V \subset U$ so, daß $\hat{E}_V \rightarrow \hat{E}_U$ polynuklear ist. Ist $\tilde{V}$ die saturierte Hülle von V , dann ist $\hat{E}_{\tilde{V}}$ ein Quotient von $\hat{E}_V$, und wir erhalten folgende Faktorisierung $\hat{E}_V \rightarrow \hat{E}_{\tilde{V}} \rightarrow \hat{E}_U$. Nach Satz 2 ist $\hat{E}_{\tilde{V}} \rightarrow \hat{E}_U$ nuklear, damit ist E/F nuklear.

Satz 5: Jedes Produkt nuklearer Räume ist nuklear.

Beweis: Das Dual eines Produktes von Räumen E_k ist die direkte Summe der Dualen Räume E'_k . Die gleichmäßig stetigen Teilmengen darin sind direkte Summen einer endlichen Zahl gleichmäßig stetiger Teilmengen irgendwelcher E'_k . Sind A'_k gleichmäßig stetige Teilmengen von E'_k , dann existieren nach Voraussetzung gleichmäßig stetige Teilmengen B'_k in E'_k , so daß die zugehörigen Abbildungen $(E'_k)_{A'_k} \rightarrow (E'_k)_{B'_k}$ nuklear sind. Da sich dies auf endliche Summen überträgt, ist die Behauptung gezeigt.

KAPITEL II EINE LOKALE KÜNNETHFORMEL

§ 4 Topologien auf Schnittmoduln

Vorbemerkungen: U und V seien im folgenden stets offene Polyzylinder oder analytische Mengen in offenen Polyzylindern komplexer Zahlenräume. Tensorprodukte von Moduln sollen in der ganzen folgenden Arbeit über $\mathbb{C}$, Tensorprodukte von Garben über O^* verstanden werden, wenn nichts anderes erwähnt wird. F bzw. G seien kohärente analytische Garben auf einer offenen Umgebung von $\bar{U}$ bzw. $\bar{V}$.

4.1 Ist U Mannigfaltigkeit, dann läßt sich auf $H^0(U, O)$ (abgekürzt $H^0(O)$, wenn der Basisraum aus dem Zusammenhang klar ist), da es sich um einen Vektorraum komplexwertiger Funktionen handelt, die KO-Topologie einführen. Da die holomorphen Funktionen stetig sind, stimmt diese Topologie mit der Topologie der kompakten Konvergenz überein. Wie man leicht einsieht, ist $H^0(O)$ ein Frechetraum. Die Normen erhält man folgendermaßen: Sei G_k eine aufsteigende Folge relativ kompakter Teilgebiete von U , die U ausschöpfen. Dann setzt man

$$p_k(f) := \sup_{x \in G_k} |f(x)| \quad f \in H^0(U, O).$$

Diese Topologie auf dem Schnittmodul der Strukturgarbe soll nun verallgemeinert werden für eine beliebige kohärente analytische Garbe F auf einem analytischen Repräsentantenraum. (Man vergleiche dazu etwa Cartan [2] oder Grauert [1].) Nach Voraussetzung über U existiert eine natürliche Zahl p , so daß auf U folgende Sequenz exakt ist:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \text{Kern}(\varphi) \longrightarrow pO \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 0$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung $\text{Kern}(\varphi)$ mit A , dann resultiert auf U aus $(*)$ eine exakte Schnittmodulsequenz (da

alle Garben kohärent analytisch sind und U Steinsch ist)
 (**) $0 \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow H^0(p_0) \longrightarrow H^0(F) \longrightarrow 0$

Es gibt einen kanonischen algebraischen Isomorphismus (Serre [1], § 1,9) $\chi: H^0(p_0) \longrightarrow pH^0(0)$. Versehen wir $pH^0(0)$ mit der Produkttopologie und fassen $H^0(p_0)$ als Vektorraum von Abbildungen $(f_1, \dots, f_p): U \longrightarrow \mathbb{C}_p$ auf, versehen mit der KO-Topologie, dann ist χ ein Isomorphismus topologischer Vektorräume (Bourbaki [4] § 1). Damit ist $H^0(p_0)$ ein Frechetraum.

4.2 Wir können in der Sequenz (**) für $H^0(A)$ die induzierte Topologie und für $H^0(F)$ die Quotiententopologie einführen. Es soll gezeigt werden, daß diese Topologisierung unabhängig von der speziellen Wahl der Auflösung (*) definiert ist und die Eigenschaften der Topologie sollen untersucht werden. Dazu beweisen wir zunächst folgende

Hilfssatz: $H^0(A)$ ist abgeschlossen in $H^0(p_0)$ und $H^0(F)$ ist hausdorffsch.

Beweis: Der zweite Teil ist eine triviale Konsequenz des ersten. Diesen beweisen wir zunächst für Mannigfaltigkeiten:

I) U sei also ein offener Polyzylinder. Ist eine Folge f^i mit $f^i \in H^0(A)$ konvergent gegen ein $g \in H^0(p_0)$, dann ist zu zeigen, daß g in $H^0(A)$ liegt. Für beliebiges $u \in U$ erzeugen die f^i und g Keime in $p_{0,u}$, die wir wieder mit f^i und g bezeichnen. Auf $p_{0,u}$ führen wir die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf einer Umgebung $V = V(u)$ ein (d.h. für $h^i, k \in p_{0,u}$ heißt die Folge h^i konvergent gegen k , wenn eine Umgebung V existiert, auf der alle $h^i = (h^i_1, \dots, h^i_p)$ und $k = (k_1, \dots, k_p)$ holomorph sind und für die zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gilt:

$$\sup_{x \in V} |h^i_j(x) - k_j(x)| < \epsilon \quad \text{für } i > i_0(\epsilon), 1 \leq j \leq p.$$

Nun reicht es offensichtlich, zu zeigen, daß für jedes $u \in U$ der von den f^i erzeugte Modul in $p\mathcal{O}_u$ abgeschlossen ist. Dies sagt der folgende Satz von Cartan aus, der für $u = 0$ formuliert ist (Cartan [1], Appendix I, Kor. 1 zu Theorem a):

"Sei M_0 ein p -dimensionaler Untermodul von $p\mathcal{O}_0$. Ist eine auf einer Umgebung $V(0)$ holomorphe Funktion g gleichmäßiger Limes von (auf $V(0)$ holomorphen) Funktionen aus M_0 , so liegt g in M_0 .

II) Nun können wir die Übertragungen auf den allgemeinen Fall vornehmen: Sei N eine analytische Menge im offenen Polyzylinder U und sei $J = J(N)$ eine kohärente Idealgarbe zu N (Wir erinnern an den folgenden Satz (Serre [1]): Sei J eine kohärente Idealgarbe in $\mathcal{O}$. Dann ist eine $\mathcal{O}/J$ -Garbe F genau dann $\mathcal{O}$ -kohärent, wenn sie $\mathcal{O}/J$ -kohärent ist). Es existiert eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow H^0(U, J) \longrightarrow H^0(U, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(U, \mathcal{O}/J) \longrightarrow 0$$

Die Topologie auf $H^0(U, \mathcal{O}/J)$ beschreibt sich als Quotiententopologie durch die Familie der Quotientenseminormen (vgl. Bourbaki [5] chap. II § 5)

$$\bar{p}_K([f]) = \inf_{h \in [f]} p_K(h) .$$

Für die volle Idealgarbe von N $\tilde{J}$ sind die Elemente aus $H^0(N, \mathcal{O}/\tilde{J})$ Funktionen im üblichen Sinne. Wir können also auch die KO-Topologie (analog zu $H^0(U, \mathcal{O})$) einführen. Gezeigt werden soll, daß die beiden (algebraisch gleichen) topologischen Vektorräume $H^0(U, \mathcal{O}/\tilde{J})$ und $H^0(N, \mathcal{O}/\tilde{J})$ homöomorph sind. Die Topologie auf $H^0(N, \mathcal{O}/\tilde{J})$ beschreibt sich durch folgende Familie von Seminormen:

$$q_C(h) := \max_{x \in C} |h(x)| , \quad C \text{ beliebiges Kompaktum}$$

Sind h und h' aus $[h]$ in $H^0(U, \mathcal{O}/\tilde{J})$, dann gilt $h - h' \in H^0(U, \tilde{J})$ und somit für jedes Kompaktum $K \subset U$:

$$q_{N \cap K}([h]) \leq \inf_{f \in [h]} p_K(f) = \bar{p}_K([h])$$

Die identische Abbildung $H^0(U, 0/\tilde{J}) \rightarrow H^0(N, 0/\tilde{J})$ ist also stetig. Nun ist $H^0(U, 0/\tilde{J})$ als Quotient eines Fréchetraumes nach einem abgeschlossenen Unterraum (vgl. I) ein Fréchetraum, ebenso ist $H^0(N, 0/\tilde{J})$ ein Fréchetraum (vgl. Grauert Remmert [2] § 8), das Theorem von Banach liefert also die behauptete Gleichheit der Topologien (es ist klar, daß $H^0(U, 0/\tilde{J})$ algebraisch und topologisch isomorph zu $H^0(U, 0)/H^0(U, J)$ ist).

4.3 Kehren wir nun zu allgemeinem J zurück. Dann soll zunächst gezeigt werden, daß der algebraische Isomorphismus für beliebiges natürliches p

$$\chi: pH^0(U, 0/J) \rightarrow H^0(U, p0/J)$$

ein Homöomorphismus ist, wenn man auf $H^0(U, p0/J)$ folgende Topologie einführt: Sei $[f] \in H^0(U, p0/J)$ mit $f = (f^i)$ für $1 \leq i \leq p$

$$\|[f]\|_K = \inf_{h \in [f]} \sup_{x \in K} \max_i |h^i(x)|.$$

Man kann $\|[f]\|_K$ durch folgende äquivalente Norm ersetzen:

$$\|[f]\|_K^+ = \inf_{h \in [f]} \sup_{x \in K} \{|h^1(x)| + \dots + |h^p(x)|\}$$

da gilt $\|[f]\|_K \leq \|[f]\|_K^+ \leq n\|[f]\|_K$. Wegen der Ungleichung

$$\sup_{x \in K} \{|h^1(x)| + \dots + |h^p(x)|\} \leq \sup_{x \in K} |h^1(x)| + \dots + \sup_{x \in K} |h^p(x)|$$

ist die Abbildung χ stetig. $pH^0(U, 0/J)$ ist ein Fréchetraum, so daß nur noch einzusehen ist, daß $H^0(U, p0/J)$ ein Fréchetraum ist, was nach Definition der Norm $\|\cdot\|_K$ unmittelbar aus der entsprechenden Aussage für $p = 1$ folgt.

Schreiben wir nun zusammenfassend noch einmal explizit die Definition der Topologie auf einem Schnittmodul in einer kohärenten analytischen Garbe auf einem analytischen Repräsentantenraum $N \subset U \subset \mathbb{C}_n$ auf, dann ergibt sich: Sei $s \in H^0(N, F)$ und $f \in H^0(U, p0(U))$ mit $s = \varphi(f)$:

$$\|s\|_K = \min_{f \in s} \sup_{x \in K} \max_i |f^i(x)|$$

Dann haben wir folgendes Resultat:

Satz: Mit der angegebenen Topologiesierung ist $H^0(N, F)$ ein Frechetraum.

Bemerkung: Es ist klar, daß in der Sequenz (**) in 4.1 die Injektion $H^0(A) \rightarrow H^0(p0)$ ein Homomorphismus (topologischer Vektorräume) ist. Nach dem Theorem von Banach ist auch die Abbildung $H^0(p0) \rightarrow H^0(F)$ ein Homomorphismus.

4.4 Sei G eine weitere kohärente analytische Garbe auf $\bar{U}$. Dann existiert eine exakte Garbensequenz auf U :

$$0 \rightarrow B \rightarrow q0 \rightarrow G \rightarrow 0.$$

Hilfssatz: Ist $\xi: F \rightarrow G$ ein Garbenhomomorphismus, dann ist die zugehörige Schnittmodulabbildung

$$\xi: H^0(F) \rightarrow H^0(G)$$

stetig.

Beweis (analog Cartan [2]): Wir betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(p0) & \xrightarrow{\beta} & H^0(F) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \chi & & \downarrow \xi & & \\ H^0(q0) & \xrightarrow{h} & H^0(G) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

in dem χ noch zu definieren ist. Seien dazu $s_1, \dots, s_p$ die Erzeugenden von $H^0(F)$ über $H^0(0)$ und $t_1, \dots, t_q$ die Erzeugenden von $H^0(G)$ über $H^0(0)$. Für $1 \leq i \leq p$ lassen sich c_{ij} aus $H^0(0)$ finden mit

$$\xi(s_i) = \sum_{j=1}^q c_{ij} t_j.$$

Wir setzen:

$$\chi(f_1, \dots, f_p) = \left(\sum_{i=1}^p c_{i1} f_i, \dots, \sum_{i=1}^p c_{iq} f_i \right).$$

χ ist eine stetige lineare Abbildung und das obige Diagramm kommutiert:

$$h \cdot \chi(f_1, \dots, f_p) = \sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^p c_{ij} f_i \right) t_j = \xi \left(\sum_{i=1}^p f_i s_i \right) = \xi \cdot g(f_1, \dots, f_p).$$

Aus der Stetigkeit von $h \cdot \chi$ folgt, daß $\xi \cdot g$ stetig ist. Nach Definition ist g surjektiv und ein Homomorphismus, damit offen. Für $W \subset H^0(G)$ ist also $g(\chi^{-1}(h^{-1}(W)))$ offen und aus der Surjektivität von g folgt:

$$\xi^{-1}(W) = g(\chi^{-1}(h^{-1}(W)))$$

und daher ist ξ stetig.

Bemerkung 1: Der Hilfssatz gestattet es, die Unabhängigkeit der Topologie auf $H^0(F)$ von der speziellen Wahl der Auflösung (*) in 4.1 zu zeigen. Ist nämlich eine zweite Auflösung von F gegeben, dann bezeichne das ξ'' im Hilfssatz die Identität, dann ist ξ linear, stetig und bijektiv. Aus Symmetriegründen ist auch ξ^{-1} stetig, linear und bijektiv, so daß ξ ein Isomorphismus topologischer Vektorräume ist.

Bemerkung 2: In die Topologiedefinition für $H^0(N, F)$ ging zunächst das Gebiet U_{ein} , in dem N liegt. Der Hilfssatz 6.1 gestattet, die Unabhängigkeit von U zu zeigen: Sei V ein weiteres Gebiet, das N als komplexen Unterraum enthält, dann gilt algebraisch und topologisch:

$$H^0(U, F) = H^0(U \cup V, F) = H^0(V, F).$$

Bemerkung 3: Sei F eine kohärente $\mathcal{O}/J$ -Garbe. Nachdem auf $H^0(N, \mathcal{O}/J)$ eine Topologie eingeführt ist, zeigt es sich als bequem, die Topologie auf $H^0(N, F)$ als Quotiententopologie dieser Topologie bestimmen zu können. In wohl leicht verständlicher Weise hat man folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(U, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^0(U, F) \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \\ H^0(N, \mathcal{O}/J) & \longrightarrow & H^0(N, F) \end{array}$$

σ ist bijektiv, stetig und linear, da $H^0(U, F)$ ein Fréchetraum ist, haben wir auf $H^0(N, F)$ die Quotiententopologie von $H^0(N, \mathcal{O}/J)$ als Fréchettopologie nachzuweisen. Dazu weisen wir wie in Hilfssatz 4.2 nach: Ist M ein Untermodul von $H^0(\mathcal{O}'')$ ($\mathcal{O}'' = \mathcal{O}/J$), dann ist M abgeschlossen. Zum Beweise sei die Topologie von $H^0(\mathcal{O}'')$ mit Hilfe des Gebietes

U definiert. Ist f^i eine Folge von Elementen aus M, die gegen ein $g \in H^0(U, p_0'')$ konvergiert, dann existieren φ^i und γ in $H^0(U, p_0)$ mit $f^i = [\varphi^i]$ und $g = \gamma$. Nach Bourbaki [1], chap. I § 7 prop. 11 lassen sich Repräsentanten γ und φ^i so wählen, daß die Folge φ^i in $H^0(U, p_0)$ gegen γ konvergiert. Da die φ^i im Urbild von M in $H^0(U, p_0)$ liegen, dieses Urbild als Untermodul von $H^0(U, p_0)$ nach 4.2 I) abgeschlossen ist, liegt auch γ im Urbild von M und damit $g = [\gamma]$ in M.

q. e. d.

§ 5 Eine lokale Künnethformel

5.1 Theorem: Es seien X und Y komplexe Räume, F bzw. G kohärente analytische Garben auf X bzw. Y . Dann existiert zu jedem $(x,y) \in X \times Y$ eine Umgebung $U \times V$, so daß $H^0(U, F) \hat{\otimes}_{\pi} H^0(V, G)$ und $H^0(U \times V, F^* \otimes_{\mathcal{O}} G^*)$ als topologische Vektorräume kanonisch isomorph sind.

Der Beweis wird geführt durch Induktion über die Struktur von X, Y, F, G :

Beweisschema: Bezeichne Γ die Klasse der komplexen Mannigfaltigkeiten und Δ die Klasse der komplexen Räume; Φ bezeichne die Klasse der kohärenten analytischen Garben. $\mathcal{O}$ bezeichne wie stets die Strukturgarben. Dann bedeute die Abkürzung " $(\Gamma, \Phi)(\Gamma, \Phi)$ " in naheliegender Weise: "Das Theorem ist richtig für Elemente der angegebenen Klassen und für Garben des angegebenen Typs auf diesen Elementen." Zur Formulierung und zur Durchführung der Induktion benötigen wir nur zwei Schlusstypen:

- " $\rightarrow$ ": Ist die Aussage bewiesen für die Strukturgarben, so gilt sie für beliebige kohärente analytische Garben.
- " $\Rightarrow$ ": Ist die Aussage bewiesen für beliebige kohärente analytische Garben, dann gilt die Aussage für die Strukturgarben auch dann noch, wenn ich in einer Komponente von der Klasse Γ zur Klasse Δ übergehe, gleichgültig, welche Klasse in der anderen Komponente auftritt.

Mit diesen Bezeichnungen können wir den Beweisgang in folgendem Diagramm schematisch darstellen:

Induktionsbeginn: $(\Gamma, 0)(\Gamma, 0)$.

Induktionsschluß:

$$(\Gamma, 0)(\Gamma, 0) \longrightarrow (\Gamma, \Phi)(\Gamma, \Phi)$$

$$\Downarrow$$

$$(\Delta, 0)(\Gamma, 0) \longrightarrow (\Delta, \Phi)(\Gamma, \Phi)$$

$$\Downarrow$$

$$(\Delta, 0)(\Delta, 0) \longrightarrow (\Delta, \Phi)(\Delta, \Phi).$$

5.2 Zunächst beweisen wir den Induktionsbeginn. Da es sich in der Aussage des Theorems um lokale Fragen handelt, genügt es, die Behauptung zu beweisen für U bzw. V offene Quader in komplexen Zahlenräumen. Nun haben wir in 2.3 Korollar gesehen, daß eine kanonische Injektion existiert:

$$H^0(U, 0) \otimes H^0(V, 0) \longrightarrow H^0(U \times V, 0^*).$$

Damit haben wir einen ersten Teil von Überlegungen, die sich unmittelbar aus Grothendiecks Betrachtungen entnehmen oder folgern lassen (Grothendieck [3] Teil I, II). Liege U im $\mathbb{C}_m$ und bezeichne E den Frechetraum $H^0(V, 0)$. Dann sei $H(U, E)$ der Raum der holomorphen Vektorfunktionen auf U mit Werten in E ; nach Definition gilt: $f \in H(U, E)$ genau dann, wenn f nach allen z_i , $1 \leq i \leq n$ komplex differenzierbar ist.

Behauptung: $H(U, E) = H^0(U \times V, 0)$ algebraisch und topologisch, wenn man $H(U, E)$ mit der KO-Topologie versieht.

Beweis: Offensichtlich ist für jedes $\varphi \in E'$

$$T_\varphi: z \longrightarrow \langle f(z), \varphi \rangle$$

eine holomorphe Funktion auf U für jede holomorphe Vektorfunktion f , denn es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \langle f(z), \varphi \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i} f(z), \varphi \right\rangle$$

(Marinescu [1], chap. IV, § 1). Ist andererseits für eine Abbildung f von U in E für jedes $\varphi \in E'$ T_φ

eine holomorphe Funktion, dann ist f nach jeder Variablen in U differenzierbar und liegt damit in $H(U, E)$ (Marinescu). Eine Funktion $g(u, v) \in H^0(U \times V, 0)$ definiert eine holomorphe Vektorfunktion $g(v)(u)$ in $H(U, E)$. Umgekehrt gilt für $f \in H(U, E)$, daß $f(u)$ eine holomorphe Funktion in v ist, die wir $f(u)(v)$ schreiben können und die holomorph in u ist für jedes feste v , da das Einsetzen eines Argumentes speziell eine stetige Linearform ist. Neben der algebraischen Gleichheit der beiden Räume, die wir hiermit gezeigt haben, ist auch die topologische Gleichheit klar mit dem Satz von Banach, denn beide Räume sind Frecheträume (für $H(U, E)$ ergibt sich das aus dem in 5.3 angegebenen Satz von Grothendieck), und die kanonische Abbildung $H^0(U \times V, 0) \rightarrow H(U, E)$ ist stetig: Seien $K \subset U$ und $K' \subset V$ kompakt, dann gilt für die die Topologie erzeugenden offenen Mengen:

$$W(K \times K', \epsilon) = W(K, W(K', \epsilon)). \quad \text{q. e. d.}$$

5.3 Nach den Überlegungen von 3.8 existiert nun eine stetige lineare Abbildung

$$H^0(U, 0) \hat{\otimes}_E E \rightarrow \mathcal{L}_E(E'_T, H^0(U, 0))$$

vor die man noch die kanonische Abbildung schalten kann

$$H^0(U, 0) \hat{\otimes}_\pi E \rightarrow H^0(U, 0) \hat{\otimes}_E E$$

und für die Grothendieck in dem Fall, daß $\dim_\mathbb{T} U = 1$ ist, in [3] § 7 Satz 8 explizit beweist:

$$\underline{\underline{\text{Satz}}}: H(U, E) = H^0(U, 0) \hat{\otimes}_\pi E = \mathcal{L}_E(E'_T, H^0(U, 0)).$$

Damit ist klar, daß $H(U, E)$ ein Frechetraum ist (vgl. 3.3 Satz 1) und daß $H(U, E)$ ein nuklearer Raum ist (da der Grothendiecksche Satz für beliebiges lokalkonvexes vollständiges E gilt, ist nach Konstruktion des Isomorphismus $H^0(U, 0)$ nuklear; für E nuklear folgt die Behauptung aus 3.8 v.) - Nach dem in 5.2 Bewiesenen gilt für $E = H^0(V, 0)$: $H^0(U \times V, 0) = H^0(U, 0) \hat{\otimes} H^0(V, 0)$

und es ist aus der Struktur der Formel unmittelbar klar, wie man für einen n -dimensionalen Würfel mit der Seite U durch Induktion über die Dimension die entsprechende Formel bekommt:

$$H^0(U \times \dots \times U, 0) = H^0(U, 0) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} H^0(U, 0)$$

und aus 3.8 v) ergibt sich wieder, daß alle Schnittmoduln nuklear sind.

5.4 Als nächstes wollen wir die Richtigkeit des Schlusses " $\longrightarrow$ " zeigen. Dazu seien zunächst F und G global freie Garben:

$$H^0(U, p_0) \hat{\otimes} H^0(V, q_0) = H^0(U \times V, pq_0)$$

(U und V wieder beliebig, vgl. 2.5)

Beweis: Nach 2.4 gilt $(p_0)^* = p_0^*$ und $(p_0(U))^* \otimes (q_0(V))^* = pq_0^*$. Die Komplettierung eines Produktes ist das Produkt der Komplettierungen; mit 3.5 erhält man dann $H^0(p_0) \hat{\otimes} H^0(q_0) = pq(H^0(0) \hat{\otimes} H^0(0)) = pqH^0(0^*) = H^0(pq_0^*)$.

Für beliebige Garben F und G wird die lineare Abbildung, die den Isomorphismus im Theorem liefert, folgendermaßen definiert:

$$(*) \quad H^0(F) \otimes H^0(G) \longrightarrow H^0(F^* \otimes G^*)$$

ordne dem Paar $(f, g) \in H^0(F) \times H^0(G)$ einen Schnitt s auf $U \times V$ in $F^* \otimes G^*$ zu, definiert durch

$$s(u, v) := f(u) \otimes 1 \otimes g(v) \in F_u \otimes 0_{uv}^* \otimes G_v.$$

Aus der Definition der Urbildgarbe und der Tensorproduktgarbe folgt sofort, daß s ein Schnitt ist. Da die Zuordnung bilinear ist, induziert sie eine lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt. Zu zeigen ist, daß $(*)$ in der π -Topologie stetig ist. Dazu reicht es nach Definition der π -Topologie aus, die Stetigkeit der $(*)$ induzierenden bilinearen Abbildung, die wir mit ζ bezeichnen wollen, nachzuweisen. Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(p0) \times H^0(q0) & \xrightarrow{\chi} & H^0(pq0^*) \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\
 H^0(F) \times H^0(G) & \xrightarrow{\zeta} & H^0(F^* \otimes G^*) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Sei $W \subset H^0(F^* \otimes G^*)$ offen, dann ist zu zeigen, daß $\zeta^{-1}(W)$ offen ist. Die Stetigkeit von χ ist bereits gezeigt, α ist trivialerweise stetig. β ist als Produkt zweier stetiger surjektiver linearer Abbildungen wieder stetig, surjektiv, linear, damit nach dem Theorem von Banach ein Homomorphismus, damit offen. Dies ergibt die Offenheit von $\beta(\chi^{-1}(\alpha^{-1}(W))) = \zeta^{-1}(W)$. So ist die Stetigkeit von ζ gezeigt.

Da $H^0(F^* \otimes G^*)$ ein Frechetraum ist, läßt sich die stetige lineare Abbildung (*) eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung (**) fortsetzen:

$$(**) \quad H^0(F) \hat{\otimes} H^0(G) \longrightarrow H^0(F^* \otimes G^*)$$

Zu zeigen bleibt also, daß (**) bijektiv und topologisch ist.

5.5 Aus den exakten Sequenzen (*) in 4.1 und 4.3, die F und G auflösen, ergibt sich eine kurze exakte Sequenz auf $U \times V$:

$$pq0^* \longrightarrow F^* \otimes G^* \longrightarrow 0,$$

die ein exaktes kommutatives Diagramm induziert:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(p0) \hat{\otimes} H^0(q0) & \longrightarrow & H^0(F) \hat{\otimes} H^0(G) & & \\
 \downarrow b & & & \downarrow c & \\
 H^0(pq0^*) & \longrightarrow & H^0(F^* \otimes G^*) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dabei ist das Diagramm kommutativ zunächst ohne Kompletterungen in der oberen Zeile. Die Fortsetzbarkeit auf die Kompletterungen liefert (**), die Kommutativität bleibt dabei erhalten (Bourbaki [1],

chap. I, § 8 Satz 2); b und c sind im Diagramm also Beispiele der Abbildung (**). Da b schon als Isomorphismus erkannt ist, haben wir die Surjektivität von c nachgewiesen.

Aus (*) resultiert weiter folgende exakte Sequenz:

$$A^* \otimes G^* \xrightarrow{\sigma} p_0^* \otimes G^* \rightarrow F^* \otimes G^* \rightarrow 0$$

aus der wir eine neue exakte Sequenz gewinnen:

$$0 \rightarrow (A^* \otimes G^*) / \text{Kern}(\sigma) \rightarrow p_0^* \otimes G^* \rightarrow F^* \otimes G^* \rightarrow 0.$$

Die kanonische Abbildung

$$H^0(A^* \otimes G^*) \rightarrow H^0(A^* \otimes G^* / \text{Kern}(\sigma))$$

ist surjektiv und stetig. Schalten wir davor die surjektive und stetige Abbildung

$$H^0(A) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow H^0(A^* \otimes G^*),$$

dann resultiert eine surjektive stetige Abbildung

$$a: H^0(A) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow H^0(A^* \otimes G^* / \text{Kern}(\sigma)).$$

$H^0(A)$, $H^0(G)$ und $H^0(F)$ sind Frecheträume. Nach 5.3 und 3.14 sind somit $H^0(p_0)$ und damit auch die übrigen Schnittmoduln nukleare Räume. Aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow H^0(A) \rightarrow H^0(p_0) \rightarrow H^0(F) \rightarrow 0$

resultiert mit 3.7 Satz 2 eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow H^0(A) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow H^0(p_0) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow H^0(F) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow 0$$

die sich in ein exaktes kommutatives Diagramm einbetten läßt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(A) \hat{\otimes} H^0(G) & \rightarrow & H^0(p_0) \hat{\otimes} H^0(G) & \rightarrow & H^0(F) \hat{\otimes} H^0(G) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \rightarrow & H^0(A^* \otimes G^* / \text{Kern} \sigma) & \rightarrow & H^0(p_0^* \otimes G^*) & \rightarrow & H^0(F^* \otimes G^*) \rightarrow 0 \end{array}$$

In diesem Diagramm sind a , b , c stetige Abbildungen, deren Surjektivität bereits gezeigt ist.

Sei nun zunächst G eine freie Garbe, dann ist nach dem in 5.4 Gezeigten b ein Isomorphismus. Nach dem Fünferlemma (Cartan Eilenberg [1]) ist dann c ein algebraischer Isomorphismus, ohne daß über F eine Voraussetzung zu machen ist. Da nun (**) (und c ist ein Beispiel für (**)) symmetrisch in F und G

ist, haben wir gezeigt, daß (**) ein algebraischer Isomorphismus ist, wenn nur eine der beiden Garben, F oder G frei ist. Da aber p_0 eine freie Garbe ist, weiter b ein Beispiel für (**), ist b ein Isomorphismus ohne daß über F oder G zusätzliche Annahmen nötig sind. Dann ist nach dem Fünferlemma c ein algebraischer Isomorphismus für beliebiges F und G . Nach dem Theorem von Banach ist c ein Isomorphismus topologischer Vektorräume.
q. e. d.

5.6 Beweis des Schlusses " $\Rightarrow$ ": Sei für den Rest des Paragraphen U ein offener Polyzylinder, der die analytische Menge A umfaßt, V ein komplexer Unterraum eines offenen Polyzylinders. J'' sei eine kohärente Idealgarbe in $\mathcal{O}(U)$ mit Nullstellenmenge A , $\mathcal{O}''$ bezeichne die Garbe $\mathcal{O}(U)/J''$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir:

$$H^0(U, \mathcal{O}'') \hat{\otimes} H^0(V, \mathcal{O}) = H^0(U \times V, (\mathcal{O}'')^*)$$

Durch Beschränkung auf die Träger der einzelnen Garben resultiert daraus (vgl. 4.2 sowie Serre [1]):

$$H^0(A, \mathcal{O}'') \hat{\otimes} H^0(V, \mathcal{O}) = H^0(A \times V, (\mathcal{O}'')^*)$$

Dabei bezeichnet $()^*$ das analytische Urbild der Garbe $()$ bezüglich $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}(U \times V)$. Sei J die von J'' in $\mathcal{O}^*$ erzeugte Idealgarbe und $\mathcal{O} = \mathcal{O}(U \times V)/J$ die zu $A \times V$ gehörige Strukturgarbe, dann muß, damit der Induktions-schluß durchgeführt werden kann, folgende Formel gezeigt werden:

$$H^0(A, \mathcal{O}'') \hat{\otimes} H^0(V, \mathcal{O}(V)) = H^0(A \times V, \mathcal{O}(A \times V)).$$

Dies liefert uns der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz: F sei eine kohärente analytische Garbe auf A , deren triviale Fortsetzung auf U wir mit F^U bezeichnen. Analytische Urbildgarbenbildung und triviale Fortsetzung sind miteinander vertauschbar.

Zeigen wir zunächst, wieso der Hilfssatz die obige Behauptung liefert: Er besagt, daß folgende Halme gleich sind:

$$(-) \quad F_u \otimes_{O(A)_u} O(A \times V)_{u,v} = F_u \otimes_{O(U)_u} O(U \times V)_{u,v}$$

Setzen wir speziell $F = O'' = O(A)$, dann folgt:

$$O(A \times V)_{u,v} = O(A)_u \otimes_{O(A)_u} O(A \times V)_{u,v} = O(A)_u \otimes_{O(U)_u} O(U \times V)_{u,v}!$$

Da der Hilfssatz ferner liefert, daß bei diesem Halmweise beschriebenen Isomorphismus Schnitte in Schnitte übergehen, haben wir einen Garbenisomorphismus

$$O''^* = O''^* \otimes_{O(U)^*} O(U \times V) = O(A \times V).$$

Zum Beweise des Hilfssatzes ist die Beziehung (-) und die Stetigkeit in Abhängigkeit von (u,v) zu beweisen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt, da U Mannigfaltigkeit, 7.2 Theorem (zu dessen Beweis man mit dem bereits bewiesenen und der Induktionsvoraussetzung auskommt), so daß aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow J''_u \longrightarrow O(U)_u \longrightarrow O''_u \longrightarrow 0$$

ein exaktes kommutatives Diagramm resultiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J''_u \otimes_{O(U)_u} O(U \times V)_{u,v} & \longrightarrow & O''_{u,v} & \longrightarrow & O''_u \otimes_{O(U)_u} O''_{u,v} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tau & & \downarrow \chi \\ 0 & \longrightarrow & J''_u O''_{u,v} & \longrightarrow & O''_{u,v} & \longrightarrow & O''_{u,v} / J''_u O''_{u,v} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da τ die Identität ist und man unmittelbar einsieht, daß φ ein Isomorphismus ist, ist auch χ ein Isomorphismus. Weiter ist klar, daß gilt

$$\begin{aligned} O(A \times V)_{u,v} &= O(U \times V)_{u,v} / J(A \times V)_{u,v} = O(U \times V)_{u,v} / J''_u O(U \times V)_{u,v} \\ (\text{Sei nämlich } V \text{ komplexer Unterraum von } G, J(V) \text{ die die} \\ \text{Struktur definierende Idealgarbe, dann gilt nach den} \\ \text{Isomorphiesätzen: } O(U \times G)_{u,v} / \{J(A)O(U \times G) + J(V)O(U \times G)\}_{u,v} \\ &= \{O(U \times G)_{u,v} / J(A)_u O(U \times G)_{u,v}\} / \{\Pi(J(V))_v O(A \times G)_{u,v}\} \end{aligned}$$

wo Π die kanonische Projektion von $O(U \times G)$ auf $O(A \times G)$ bedeute.) Mit diesen Beziehungen können wir (-) beweisen:

$$\begin{aligned} F_u \otimes_{O(A)_u} O(A \times V)_{u,v} &= F_u \otimes_{O(A)_u} \{O(U \times V)_{u,v} / J_u'' O(U \times V)_{u,v}\} \\ &= F_u \otimes_{O(A)_u} \{O_u'' \otimes_{O(U)_u} O(U \times V)_{u,v}\} \\ &= F_u \otimes_{O(U)_u} O(U \times V)_{u,v} \end{aligned}$$

da nach Definition $O(A) = O''$. Aus der Konstruktion des Isomorphismus ergibt sich weiter sofort, daß er stetig ist. q. e. d.

Bemerkung: Betrachten wir die vollen Idealgarben $\tilde{J}(A)$ und $\tilde{J}(V)$, dann ist klar, daß $\tilde{J}(A)O(U \times G) + \tilde{J}(V)O(U \times G)$ eine Untergarbe von $\tilde{J}(A \times V)$ ist. Indessen sind beide Garben gleich. Bezeichne $*$ die Urbildgarbenbildung auf $U \times G$, dann haben wir bereits gesehen: $\tilde{J}(A)_{uv}^* = \tilde{J}(A)_u \otimes_{O(U)_u} O_{u,v}^* = \tilde{J}(A)_u O(U \times G)_{uv}$. Ferner existiert ein Garbenhomomorphismus

$$\eta: O^*/\tilde{J}(A)^* \otimes O^*/\tilde{J}(V)^* \longrightarrow O^*/\{\tilde{J}(A)^* + \tilde{J}(V)^*\}$$

mit $\eta([a] \otimes [b]) = [ab]$. η ist wohldefiniert, linear und surjektiv; wegen $1 \in O^*$ existiert zu η die Umkehrabbildung $[ab] \longrightarrow [ab] \otimes 1 = [a] \otimes [b]$, so daß η injektiv ist. Wir haben insgesamt folgenden Isomorphismus

$$O_{uv}^*/\tilde{J}(A)_{uv}^* \otimes_{O_{uv}^*} O_{uv}^*/\tilde{J}(V)_{uv}^* = O_{uv}^*/\{\tilde{J}(A)_u O_{uv}^* + \tilde{J}(V)_v O_{uv}^*\}.$$

Um die Gleichheit der obigen Idealgarben nachzuweisen, genügt es offensichtlich, zu zeigen, daß dieses analytische Tensorprodukt (vgl. Nagata [1] Nr. 47) reduzierter Ringe wieder reduziert ist. Das wird etwa in Grauert Remmert [3] gezeigt.

KAPITEL III ANWENDUNGEN

§ 6 Eine globale Künnethformel

Vorbemerkungen: X und Y seien wieder komplexe Räume, F bzw. G kohärente analytische Garben auf X bzw. Y , (U_i) $i \in I$ bzw. (V_k) $k \in K$ seien offene Überdeckungen von X bzw. Y . Da wir für X und Y abzählbare Topologie verlangen, können wir I und K abzählbar voraussetzen. Die Mengen U_i und V_k seien Steinsch und relativ kompakt in ihrem Raum.

6.1 In den Bezeichnungen der Kohomologietheorie halten wir uns in der Regel an Serre [1]. Sei $S(I)$ die Menge aller s_p mit $s_p = (i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$, sei

$$U_{s_p} := U_{i_0 \dots i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

$H^0(U_{s_p}, F)$ ist ein Frechetraum; versehen wir

$$C^p((U_i), F) = \prod_{s_p} H^0(U_{s_p}, F)$$

mit der Produkttopologie, dann wird es ebenfalls ein Frechetraum, ebenso verfahren wir mit

$$C((U_i), F) = \prod C^p((U_i), F).$$

Für Mengen $U \subset V$ ist die kanonische Beschränkungsabbildung $\rho: H^0(V, F) \rightarrow H^0(U, F)$ stetig, wenn U und V relativkompakt in X und Steinsch sind: dies ist klar, falls F die Strukturgarbe ist. Damit ist auch die entsprechende Abbildung $\rho: H^0(V, p_0) \rightarrow H^0(U, p_0)$ stetig; für allgemeines kohärentes analytisches F existiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(V, p0) & \xrightarrow{\tilde{p}} & H^0(U, p0) \\
 \downarrow a & & \downarrow b \\
 H^0(V, F) & \xrightarrow{p} & H^0(U, F) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Sei $f \in H^0(V, F)$ und W eine Umgebung von $p(f)$ in $H^0(U, F)$, dann ist, da b und $\tilde{p}$ stetig sind und a offen ist, $a(\tilde{p}^{-1}(b^{-1}(W)))$ eine Umgebung von f . p ist stetig, da $p^{-1}(W)$ diese Menge umfaßt.

Der Korandoperator $\delta^p: C^p((U_i), F) \longrightarrow C^{p+1}((U_i), F)$ mit

$$(\delta^p f)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \text{res}(f_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}})$$

(res bedeute jeweils die Beschränkung auf den durch die Indizes der linken Seite angegebenen offenen Durchschnitt U_{s_i}) ist linear und nach dem gerade Gesagten stetig. $\delta: C((U_i), F) \longrightarrow C((U_i), F)$ ist eine stetige lineare Abbildung und

$$\delta^{-1}(0) = Z((U_i), F) = \Pi_p Z^p((U_i), F)$$

ist als abgeschlossener Unterraum eines Frechetraumes selbst ein Frechetraum.

6.2 Nach 1.4 ist $C((U_i), F) \otimes C((V_k), G)$ ein Doppelkomplex mit den beiden Korandoperatoren δ' und δ'' sowie dem totalen Korandoperator δ :

$$\delta(f^p \otimes g^q) = (\delta' f^p) \otimes g^q + (-1)^p f^p \otimes \delta'' g^q$$

δ ist stetig und linear. Bevor wir nun eine globale Künnethformel herleiten können, müssen wir die Ergebnisse aus der Homologischen Algebra von Sampson Washnitzer [2] Nr. 4 und 5 mit den Resultaten von § 4 verbinden. Nehmen wir für den Moment an, daß (U_i) und (V_k) Überdeckungen von X sind, dann soll zu diesen beiden Überdeckungen ein Doppelkomplex definiert werden; zur Abkürzung werden wir die betrachtete Garbe F nicht in die Bezeichnungen aufnehmen: Für $s_p \in S(I)$

und $t_q \in S(K)$ beliebig setzen wir

$$C^{p,q}((U_i), (V_k)) = s_p \prod_{t_q} H^0(U_{s_p} \cap V_{t_q})$$

und ferner

$$C((U_i), (V_k)) = \prod_{p,q} C^{p,q}((U_i), (V_k))$$

Die beiden Korandoperatoren

$$\delta': C^{p,q}((U_i), (V_k)) \longrightarrow C^{p+1,q}((U_i), (V_k))$$

$$\delta'': C^{p,q}((U_i), (V_k)) \longrightarrow C^{p,q+1}((U_i), (V_k))$$

werden definiert durch

$$(\delta' f)_{i_0 \dots i_{p+1}, t} = \sum_{v=0}^{p+1} (-1)^v \text{res } f_{i_0 \dots \hat{i}_v \dots i_{p+1}, t}$$

$$(\delta'' f)_{s, j_0 \dots j_{q+1}} = \sum_{v=0}^{q+1} (-1)^v \text{res } f_{s, j_0 \dots \hat{j}_v \dots j_{q+1}}.$$

Dann gilt wie üblich

$$\delta' \cdot \delta' = \delta'' \cdot \delta'' = \delta' \cdot \delta'' + \delta'' \cdot \delta' = 0$$

Mit dem totalen Korandoperator $\delta = \delta' + \delta''$ erhalten wir auf die in 1.4 gekennzeichnete Weise einen einfachen Kokettenkomplex:

$$C^a((U_i), (V_k)) = \prod_{p+q=n} C^{p,q}((U_i), (V_k)).$$

Die Kohomologiemoduln bezüglich δ werden wir mit

$$H^a((U_i), (V_k); F)$$

bezeichnen.

6.3 Sei nun (V_j) $j \in J$ wieder Überdeckung von Y . Dann erhalten wir zu $X \times Y$ zwei Überdeckungen (U_i^*) und (V_j^*) (alle das Produkt betreffenden Größen sollen nach Möglichkeit mit einem Stern gekennzeichnet werden) mit $U_i^* := U_i \times Y$ und $V_j^* := X \times V_j$. Die Abbildung $(**)$ aus 5.4 liefert nun eine Abbildung

$$\hat{\phi}^{p,q}: C^p((U_i), F) \hat{\otimes} C^q((V_j), G) \rightarrow C^{p,q}((U_i^*), (V_j^*); F^* \otimes G^*)$$

die induziert wird durch

$$\phi^{p,q}(f \otimes g)_{s,t} = \chi(f_s \otimes g_t) = f_s \otimes 1 \otimes g_t,$$

wobei wir $(**)$ mit χ bezeichnet haben. Wir erinnern daran, daß $(\Pi A_i) \hat{\otimes} (\Pi B_j) = \Pi (A_i \hat{\otimes} B_j)$ (3.5 Satz).

Nach 5.1 Theorem sind die $\hat{\phi}^a$ Isomorphismen topologischer Vektorräume.

Machen wir die beiden Doppelkomplexe durch die totale Graduierung zu einfachen Komplexen, dann stiften die $\hat{\varphi}^p$ einen Isomorphismus der Kokettenkomplexe:

$$\varphi: C((U_1), F) \hat{\otimes} C((V_1), G) \rightarrow C((U_1^*), (V_1^*); F^* \otimes G^*)$$

Zum Beweise genügt es, zu zeigen, daß φ mit den Korandoperatoren auf einem dichten Unterraum vertauschbar ist. Seien dazu $\delta = \delta' + \delta''$ die Korandoperatoren des linken Ausdrucks, $\delta^* = \delta'^* + \delta''^*$ die des rechten:

$$\begin{aligned} & \varphi((\delta(\sum_{p+q=n} f^p \otimes g^q)_{i_1 \dots i_{n+2}})) = \\ & \varphi(\sum_{p+q=n} \{(\delta' f^p \otimes g^q)_{i_1 \dots i_{n+2}} + (-1)^p (f^p \otimes \delta'' g^q)_{i_1 \dots i_{n+2}}\}) = \\ & \varphi(\sum_{p+q=n} \{ \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \text{res}(f^p \otimes g^q)_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} \dots i_{n+2}} + \\ & \quad + \sum_{k=p+1}^{n+2} (-1)^{p+k} \text{res}(f^p \otimes g^q)_{i_1 \dots i_p \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} \}) = \\ & \sum_{p+q=n} \{ \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \text{res}(f^p \otimes 1 \otimes g^q)_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} \dots i_{n+2}} + \\ & \quad + \sum_{k=p+1}^{n+2} (-1)^{p+k} \text{res}(f^p \otimes 1 \otimes g^q)_{i_1 \dots i_p \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} \} = \\ & \sum_{p+q=n} \{ (\delta'^* + \delta''^*)(f^p \otimes 1 \otimes g^q)_{i_1 \dots i_{n+2}} \} = \\ & \delta^*(\sum_{p+q=n} f^p \otimes 1 \otimes g^q)_{i_1 \dots i_{n+2}} = \delta^*(\varphi(\sum_{p+q=n} f^p \otimes g^q))_{i_1 \dots i_{n+2}} \end{aligned}$$

6.4 Da $H^0(U_{S_p}, 0)$ ein nuklearer Raum ist, sind nach

Satz 4 und Satz 5 aus 3.14 folgende Räume nuklear: $H^0(U_{S_p}, q0)$, $H^0(U_{S_p}, F)$, $C^p((U_1), F)$, $C((U_1), F)$. Um nun die Künnethformel von Grothendieck (vgl. 3.7 Satz 3) für topologische Vektorräume anwenden zu können, müssen wir unters chen, wann δ' und δ'' Homomorphismen sind. $H((U_1), F)$ ist mit der Quotiententopologie hausdorffsch genau dann, wenn $B((U_1), F)$

abgeschlossen ist in $Z((U_1), F)$. Damit ist $H((U_1), F)$ genau dann ein Frechetraum, wenn δ' ein Homomorphismus ist (Theorem von Banach und Bourbaki [5] chap. I § 3,3 Kor. 3 von Theorem 1).

Bemerkung: Für $\dim_{\mathbb{R}} X < p$ ist $H^p(X, F) = 0$ (wie unmittelbar aus dem Pflastersatz folgt; (vergleiche dazu etwa Hirzebruch [1]). Wegen $B((U_1), F) = \prod_p B^p((U_1), F)$ sind mit B auch alle B^p Frecheträume und $H((U_1), F)$ ist auch topologisch isomorph zu $\prod_p H^p((U_1), F)$. Damit ergibt sich folgender Satz:

Satz: Seien $H((U_1), F)$ und $H((V_1), G)$ hausdorffsch. Dann existiert ein topologischer Isomorphismus:

$$H((U_1), F) \hat{\otimes} H((V_1), G) = H((U_1^*), (V_1^*); F^* \otimes G^*).$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Konsequenz von 3.7 Satz 3.

6.5 Nun ist aber $H((U_1^*), (V_1^*); F^* \otimes G^*)$ nicht der üblicherweise betrachtete Kohomologiemodul, sondern man interessiert sich für einen induktiven Limes der Gestalt $H(X \times Y, F^* \otimes G^*)$. Bezeichne im folgenden S eine Garbe von Ringen, (W_k) bezeichne den Durchschnitt der beiden Überdeckungen (U_1^*) und (V_1^*) , d.h. $W_k = W_1$, sei definiert als $U_1^* \cap V_1^* = U_1 \times V_1$. Wir werden zu nächst $H^a((U_1^*), (V_1^*); S)$ mit $H^a((W_k), S)$ vergleichen.

Sampson Washnitzer beweisen in [1] Satz 9, 10, 11:

i) Es existiert eine kanonische lineare Abbildung

$$\chi: H^a((U_1^*), (V_1^*); S) \longrightarrow H^a((W_k), S)$$

die durch folgende Kokettenabbildung induziert wird:

$$\alpha: C^{p,q}((U_1^*), (V_1^*); S) \longrightarrow C^{p,q}((W_k), S),$$

definiert durch

$$(\alpha f)_{(i,j), \dots, (i_{p,q}, j_{p,q})} = \text{res } f_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_{p,q}}$$

mit $(i,j), \dots, (i_{p,q}, j_{p,q}) \in K = I \times J$.

ii) χ ist ein algebraischer Isomorphismus.

iii) Seien (U_i^*) und (V_j^*) offene Verfeinerungsüberdeckungen von (U_i^*) bzw. (V_j^*) , (W_k^*) bezeichne die Durchschnittsüberdeckung. Dann kommutiert das zugehörige Beschränkungsdiagramm für alle $n \geq 0$:

$$\begin{array}{ccc} H^n((U_i^*), (V_j^*); S) & \xrightarrow{\chi} & H^n((W_k^*), S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n((U_i), (V_j); S) & \xrightarrow{\chi'} & H^n((W_k), S) \end{array}$$

Sind (U_i) und (U_i') Steinsche Überdeckungen von X und ist S eine kohärente analytische Garbe auf X , dann ist der kanonische algebraische Isomorphismus

$$\sigma: H^n((U_i), S) \longrightarrow H^n((U_i'), S)$$

der durch die Beschränkungsabbildungen gegeben wird (vgl. 2.2) ein Isomorphismus topologischer Vektorräume. Denn einerseits ist σ stetig: In 6.1 haben wir gezeigt, daß die Beschränkungsabbildung

$$Z^n((U_i), S) \xrightarrow{\rho} Z^n((U_i'), S)$$

stetig ist. Durch Anhängen der stetigen Quotientenabbildung ergibt sich die Stetigkeit von

$$Z^n((U_i), S) \longrightarrow H^n((U_i'), S)$$

woraus die Stetigkeit von σ folgt. Andererseits ist die Offenheit von σ zu zeigen:

Wir benutzen folgenden algebraischen Sachverhalt:

Seien $A \subset B$ und $C \subset D$ Vektorräume, $f: B \longrightarrow D$ eine lineare Abbildung mit $f(A) \subset C$. Ist die zugehörige Abbildung $[f]: B/A \longrightarrow D/C$ surjektiv, so gilt:

$$D = \text{Bild}(f: B \longrightarrow D) + C$$

Für unsere Situation ergibt sich (wir nehmen die Garbe S nicht in die Bezeichnungen auf):

$$\begin{aligned} Z^n((U_i')) &= \text{Bild}\{\rho^n: Z^n((U_i)) \longrightarrow Z^n((U_i'))\} + \\ &+ \text{Bild}\{\delta^{n-1}: C^{n-1}((U_i')) \longrightarrow Z^n((U_i'))\} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine surjektive Abbildung:

$$w: Z^n((U_i)) \times C^{n-1}((U_i')) \longrightarrow Z^n((U_i'))$$

mit $w(f,g) := \rho^n(f) + \delta^{n-1}(g)$. ρ^n und δ^{n-1} sind stetig, damit ist w stetig. Urbildraum und Bildraum sind Frecheträume und w ist linear, so daß w nach dem Theorem von Banach ein Homomorphismus ist, d.h. eine offene Abbildung. Nun existiert folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z^n((U_i)) \times C^{n-1}((U_i)) & \xrightarrow{w} & Z^n((U_i)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p' \\ Z^n((U_i)) & & \\ p \downarrow & & \\ H^n((U_i)) & \xrightarrow{\sigma} & H^n((U_i)) \end{array}$$

Alle auftretenden Abbildungen sind stetig, p und p' sind als Quotientenvektorraumabbildungen offen, π ist als Projektion offen, damit ist σ offen.

6.6 Die Topologie des induktiven Limes $H^n(X, S)$ läßt sich damit definieren als die durch irgendeine Überdeckung mit relativkompakten Steinschen Karten gegebene Topologie. Die Eigenschaft, relativkompakt zu sein, wird nur zunächst einmal zur Definition der Topologien benötigt. Hat man erst einmal die globale Künnethformel bewiesen, dann ist aus dem obigen Beweisgang klar, daß man die Topologie aus jeder Überdeckung mit Steinschen Karten bekommt.

Nun soll das Konstruktionsverfahren von 6.5 noch dazu benutzt werden, die Kohomologiemoduln mit Doppelüberdeckungen algebraisch und topologisch durch Kohomologiemoduln mit einfachen Überdeckungen zu ersetzen. Die algebraische Ersetzung leistet schon die Abbildung χ aus 6.5 ii). Wir wollen zeigen, daß ein Isomorphismus topologischer Vektorräume ist. Dazu untersuchen wir zu einer Abbildung w , die definiert ist durch (vgl. 6.5 i))

$$w\left(\prod_{p+q=n} f^{p,q}, g\right) := \sum_{p+q=n} \alpha(f^{p,q}) + \delta^{n-1}(g)$$

folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 Z^n((U_i^*), (V_j^*)) \times C^{n-1}((W_k)) & \xrightarrow{w} & Z^n((W_k)) \\
 \pi \downarrow & & \\
 Z^n((U_i^*), (V_j^*)) & & s' \downarrow \\
 s \downarrow & & \\
 H^n((U_i^*), (V_j^*)) & \xrightarrow{\chi} & H^n((W_k))
 \end{array}$$

Alle auftretenden Abbildungen sind linear und sur-jektiv. π , s , s' sind stetig und offen; ist w als stetig und offen erkannt, dann ist χ als Isomorphismus der algebraischen Struktur auch ein Isomorphismus topologischer Vektorräume. Da nun aus der Stetigkeit von w nach dem Theorem von Banach die Offenheit folgt, genügt es, w als stetig nachzuweisen. Da δ^n stetig ist, genügt es dazu, die Stetigkeit von α einzusehen.

Setzen wir zum Nachweis dessen abkürzend

$$A(m, n | p, q) := H^0(U_{i_1} \dots i_n \times V_{j_1} \dots j_q)$$

dann erhalten wir für

$$\alpha: C^{p,q}((U_i^*), (V_j^*)) \longrightarrow C^{p+q}((W_k))$$

die Darstellung:

$$\alpha: \prod_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} A(0, p | 0, q) \longrightarrow \prod_{(i_1, j_1) \dots (i_{p+q}, j_{p+q})} A(0, p+q | 0, p+q)$$

Nun ist für jeden einzelnen Faktor die zu α gehörige Abbildung

$$\alpha | A(0, p | p, p+q) \longrightarrow A(0, p+q | 0, p+q)$$

als Beschränkungsabbildung stetig, damit ist

$$\alpha | A(0, p | p, p+q) \longrightarrow \prod_{\substack{i_{p+1} \dots i_{p+q} \\ j_1 \dots j_{p-1}}} A(0, p+q | 0, p+q)$$

stetig, ebenso

$$\alpha: \prod_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_p \dots j_{p+q}}} A(0, p | p, p+q) \longrightarrow \prod_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_p \dots j_{p+q}}} \left\{ \prod_{\substack{i_{p+1} \dots i_{p+q} \\ j_1 \dots j_{p-1}}} A(0, p+q | 0, p+q) \right\}$$

q. e. d.

6.7 Nach 6.5 iii) ist beim Übergang zum induktiven Limes in 6.4 Satz in der Künnethformel der Isomorphismus unabhängig von der Wahl der Überdeckungen. Damit erhalten wir insgesamt folgendes Resultat:

Theorem (Künnethformel): Seien X und Y komplexe Räume, und seien $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{G}$ kohärente analytische Garben auf X bzw. Y . Sind $H(X, \mathcal{F})$ und $H(Y, \mathcal{G})$ hausdorffsch, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus topologischer Vektorräume:

$$H(X, \mathcal{F}) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} H(Y, \mathcal{G}) = H(X \times Y, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}^*).$$

Dieser Isomorphismus respektiert die Graduierung:

$$\bigcap_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{F}) \hat{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}) = H^n(X \times Y, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{G}^*).$$

Korollar (Universelles Koeffiziententheorem):

Ist X Steinsch und $H(Y, \mathcal{G})$ hausdorffsch, dann gilt:

$$H^0(X, \mathcal{F}) \hat{\otimes} H^n(Y, \mathcal{G}) = H^n(X \times Y, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{G}^*).$$

§ 7 Beispiele und ein Urbildgarbensatz

Vorbemerkung: X und Y seien komplexe Räume, und $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{G}$ kohärente analytische Garben auf X bzw. Y .

7.1 Da die Schnittmoduln nach Definition der Topologie stets hausdorffsch sind, gilt die Künnethformel, wenn alle höherdimensionalen Kohomologiemoduln verschwinden:

Satz 1: Für $p \geq 1$ und $q \geq 1$ seien $H^p(X, \mathcal{F})$ und $H^q(Y, \mathcal{G})$ gleich Null. Dann gilt die Künnethformel.

Als Korollar ergibt sich sofort mit Theorem B:

Korollar: Sind X und Y Steinsch, dann gilt die Künnethformel.

Dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 2: Seien für $p, q \geq 1$ $\dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \mathcal{F})$ und $\dim_{\mathbb{C}} H^q(Y, \mathcal{G})$ endlich. Dann gilt die Künnethformel.

Beweis: Um die Künnethformel für topologische Vektorräume anwenden zu können (3.7 Satz 3), ist zu zeigen, daß die Korandoperatoren

$\delta': C((U_i), \mathcal{F}) \rightarrow Z((U_i), \mathcal{F})$; $\delta'': C((V_j), \mathcal{G}) \rightarrow Z((V_j), \mathcal{G})$ Homomorphismen sind. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Hilfssatzes (vgl. Serre [2] Lemma 2):

Hilfssatz: Seien M und L Frecheträume und sei $\chi: L \rightarrow M$ eine stetige lineare Abbildung. Ist $\chi(L)$ ein endlich kodimensionaler Unterraum von M , dann ist χ ein Homomorphismus.

Korollar: Sind X und Y kompakt, dann gilt die Künnethformel: $H(X, F) \otimes H(Y, G) = H(X \times Y, F^* \otimes G^*)$.

Denn dann sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt (vgl. etwa Grauert [1] § 2 Satz 6). Da alle Kohomologiemoduln endlichdimensional sind, ist das topologische Tensorprodukt schon vollständig, so daß auf die Komplettierung verzichtet werden kann.

Damit haben wir eine verschärfte Form von Sampson Washnitzer [2] Bemerkung zu Theorem I bewiesen. Zusätzlich haben wir gezeigt, daß der angegebene Isomorphismus ein Isomorphismus topologischer Vektorräume ist.

Satz 3: Sei $H^p(X, F)$ hausdorffsch für $1 \leq p \leq n$, sei $H^q(Y, G)$ hausdorffsch für $1 \leq q \leq m$. Dann gilt:

$$\prod_{p+q=k} H^p(X, F) \hat{\otimes} H^q(Y, G) = H^k(X \times Y, F^* \otimes G^*)$$

für $0 \leq k \leq \min(m, n) - 1$.

Beweis: Die Topologie auf den Kohomologiemoduln rührt her von Überdeckungen (U_i) und (V_j) , wir betrachten

$$K = \left\{ \prod_{q=0}^{m-1} C^q((V_j), G) \right\} \times Z^n((V_j), G)$$

$$L = \left\{ \prod_{p=0}^{n-1} C^p((U_i), F) \right\} \times Z^m((U_i), F)$$

Die Korandoperatoren δ^p und δ^q werden auf naheliegende Weise definiert. Nach den Überlegungen von 6.4 sind sie Homomorphismen, und da K und L nuklear sind, gilt: $H(K \hat{\otimes} L) = H(K) \hat{\otimes} H(L)$. Nach Konstruktion von K und L gilt: $H^q(K) = H^q(Y, G)$ für $0 \leq q < m$, sowie $H^p(L) = H^p(X, F)$ für $0 \leq p \leq n$, für $0 \leq k < \min(m, n)$ gilt

$$H^k(K \hat{\otimes} L) = H^k(X \times Y, F^* \otimes G^*) .$$

7.2 Als Konsequenz der lokalen Künnethformel beweisen wir folgenden

Satz: Sei G eine kohärente analytische Garbe auf Y und sei auf X eine exakte Sequenz kohärenter analytischer

Garben gegeben: $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow 0$. Dann ist auf $X \times Y$ folgende Garbensequenz exakt:

$$0 \rightarrow A^* \otimes G^* \xrightarrow{\sigma} B^* \otimes G^* \rightarrow F^* \otimes G^* \rightarrow 0.$$

Zum Beweise ist nach 2.4 nur zu zeigen, daß σ injektiv ist. Die Injektivität ist halmweise untersuchbar. Seien zu festem $(x,y) \in X \times Y$ Steinsche Umgebungen $U = U(x)$ und $V = V(y)$ gegeben, dann erhalten wir ein exaktes und kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow H^0(U,A) \hat{\otimes} H^0(V,G) \rightarrow H^0(U,B) \hat{\otimes} H^0(V,G) \rightarrow H^0(F) \hat{\otimes} H^0(G) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ H^0(U \times V, A^* \otimes G^*) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(U \times V, B^* \otimes G^*) \rightarrow H^0(U \times V, F^* \otimes G^*) \end{array}$$

Die lokale Künnethformel liefert nun, daß die senkrechten Pfeile Isomorphismen sind, d.h. σ^* ist injektiv. Da die Steinschen Produktumgebungen von (x,y) ein Umgebungsfundamentalsystem bilden, erhalten wir aus den exakten Sequenzen des obigen Diagramms im induktiven Limes eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A_{xy}^* \otimes G_{xy}^* \rightarrow B_{xy}^* \otimes G_{xy}^* \rightarrow F_{xy}^* \otimes G_{xy}^* \\ (\text{tensoriert wird dabei über } \mathcal{O}_{xy}^*), \text{ womit die Injektivität von } \sigma \text{ gezeigt ist.}$$

Ersetzt man in dem Satz G speziell durch die Garbe $\mathcal{O}(Y)$, dann wird aus ihm

Theorem: Seien X und Y komplexe Räume. Die Bildung der analytischen Urbildgarben bezüglich der Projektion π_X ist ein exakter Funktor auf der Kategorie der kohärenten analytischen Garben auf X mit Werten in der Kategorie der kohärenten analytischen Garben auf $X \times Y$.

Dieses Beweisprinzip läßt sich natürlich allgemeiner anwenden als nur auf Produkträume. Denn die Injektivität eines Garbenhomomorphismus ist eine lokale Aus-

sage, so daß folgender Begriff dem Problem angemessener ist (zu Definition und Anwendung vgl. Grauert Kerner [1]): Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ heißt lokal-trivial, wenn zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$, eine Umgebung $V = V(\tau(x))$, ein komplexer Raum W und eine biholomorphe Abbildung γ existiert mit $\gamma: U \rightarrow V \times W$ und $\tau = \pi_V \circ \gamma$.

Korollar: Sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine lokal-triviale Abbildung. Dann ist die analytische Urbildgarbenbildung bezüglich τ ein exakter Funktor auf der Kategorie der kohärenten analytischen Garben auf Y mit Werten in der Kategorie der kohärenten analytischen Garben auf X .

Sind X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten und ist τ eine reguläre holomorphe Abbildung, dann sind die Voraussetzungen des Korollars erfüllt.

7.3 Um nun zu zeigen, daß die Voraussetzungen in der Künnethformel in gewissem Sinne notwendig sind, wollen wir für einen Spezialfall eine Umkehrung beweisen:

Satz: Sei Y Steinsch und es gelte:

$$H^a(X, F) \hat{\otimes} H^0(Y, 0) = H^a(X \times Y, F^*).$$

Dann ist $H^a(X, F)$ hausdorffsch.

Beweis: Die linke Seite der Gleichung ist nach Definition der Komplettierung hausdorffsch, so daß nach Voraussetzung die rechte Seite hausdorffsch ist. Kann man nun eine stetige Injektion konstruieren

$$H^a(X, F) \rightarrow H^a(X \times Y, F^*)$$

dann ist die Behauptung gezeigt.

Die Topologie auf $H^a(X, F)$ kommt von einer Steinschen Überdeckung (U_i) . Für eine Menge U daraus können wir folgende Abbildung von $H^0(U, F)$ nach $H^0(U \times Y, F^*)$ betrachten: f geht über in $f \otimes 1$. Diese Abbildung ist

linear und stetig, sie induziert eine lineare und stetige Injektion $C^a((U_1)) \rightarrow C^a((U_1), Y)$, indem Schnitten f zugeordnet werden Schnitt f^* mit $f^*(x, y) = f(x)$. Bezeichnen δ und δ^* die Korandoperatoren, dann gilt: Aus $\delta(f) = 0$ folgt $\delta^*(f^*) = 0$. Aus $\delta^*(f^*) = 0$ folgt trivialerweise $\delta(f) = 0$, so daß wir haben:

$$Z^a((U_1)) = Z^a((U_1), Y) \cap C^a((U_1)).$$

Hat f die Darstellung $f = \delta(g)$, dann gilt $f^* = \delta^*(g^*)$. Ist umgekehrt $f^* = \delta^*(g')$ mit $g' \in C^a((U_1), Y)$, dann gilt: $f^*_{i_1 \dots i_n} = \sum (-1)^{\text{res}} g'_{i_1 \dots i_n}$. Machen wir die zu g' gehörigen Schnitte in Y konstant, in dem wir definieren: $g'_{i_1 \dots i_n}(x) := g'_{i_1 \dots i_n}(x, y_0)$,

dann haben wir eine Kokette in $C^a((U_1))$ definiert. Falls F die Strukturgarbe von X ist, ist diese Behauptung aus der Definition der Strukturgarbe klar. Damit überträgt sie sich für $F = p_0$, da dann gilt: $F^* = p_0^*$. Für F beliebig genügt es zu zeigen, daß g in jedem $H^0(U_{s_k}, F)$ einen Schnitt erzeugt. Setzen wir $U := U_{s_k}$, dann existiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(U, p_0) & \xrightarrow{\tau} & H^0(U, F) \rightarrow 0 \\ \downarrow \alpha & & \beta \downarrow \\ H^0(U \times Y, p_0^*) & \xrightarrow{\sigma} & H^0(U \times Y, F^*) \rightarrow 0 \end{array}$$

Dann erhält man gerade $\tau(\alpha^{-1}(\sigma^{-1}(g'))) = g$. Nach Konstruktion ist dann klar, daß $\delta(g) = f$ ist. Damit haben wir gezeigt:

$$B^a((U_1)) = B^a((U_1), Y) \cap C^a((U_1)).$$

Es existiert eine Injektion

$$\lambda: H^a((U_1), F) \rightarrow H^a((U_1), Y; F^*)$$

und λ ist stetig, denn λ kommt von

$$Z^a((U_1)) \rightarrow Z^a((U_1), Y) \rightarrow H^a((U_1), Y)$$

durch Übergang zum Quotienten $H^a((U_1))$. q. e. d.

7.4 Dies gestattet nun, ein einfaches Beispiel anzugeben, in dem die Schnittmoduln nicht hausdorffsch sind und die Künnethformel nicht gilt: Sei im $\mathbb{C}_2$ definiert: $G = \{(w,z), |w| < 1\}$, $H = \{(w,z), |z| > 1\}$. Sei $X = G \cup H$, dann ist $B^1(X,0)$ nicht abgeschlossen. G und H sind Steinsch, wir können sie zur Definition der Topologie auf C^1 benutzen. Die Behauptung besagt dann, daß es eine holomorphe Funktion f auf dem Durchschnitt $G \cap H$ gibt, die sich kompakt approximieren läßt durch Funktionen der Gestalt $g_1 - h_1$, wobei g_1 holomorph auf G und h_1 holomorph auf H , die sich selber jedoch nicht in dieser Gestalt schreiben läßt. Beispiel: $f(w,z) = z^{-1}(w-1)^{-1}$. f läßt sich kompakt gleichmäßig approximieren durch

$$0 + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{z} w^k$$

ließe sich f jedoch als Differenz $g - h$ schreiben, erhielte man durch die Laurententwicklung von g und h (Osgood [1] § 20) einen Widerspruch.

Während für Steinsche Räume die Künnethformel gilt, ist sie im Allgemeinen also nicht einmal richtig für komplexe Mannigfaltigkeiten, die sich durch zwei Steinsche Mannigfaltigkeiten überdecken lassen. Die große Bedeutung der komplexen Struktur für die Gültigkeit der Künnethformel erhellt folgender

Satz: Ist $H(X,0)$ hausdorffsch, dann ist auch $H(X,F)$ hausdorffsch für kohärentes analytisches F .

Zum Beweise betrachten wir zu einer Überdeckung (U_i) , bezüglich der die Topologie gegeben ist, den Korandoperator $\delta: C^p((U_i), F) \rightarrow C^{p+1}((U_i), F)$, von dem zu zeigen ist, daß er ein Homomorphismus ist. Dies ist unmittelbar klar für den Fall, daß $F = n0$.

Im allgemeinen Fall hat man zu jeder Überdeckungsmenge

U eine exakte Topologie-definierende Sequenz:

$$H^0(U, nO) \longrightarrow H^0(U, F) \longrightarrow 0,$$

wodurch wir ein kommutatives Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{S_p} H^0(U_{S_p}, nO) & \xrightarrow{\eta} & \prod_{S_p} H^0(U_{S_p}, F) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \tilde{\delta} & & \downarrow \delta \\ \prod_{S_{p+1}} H^0(U_{S_{p+1}}, nO) & \xrightarrow{\lambda} & \prod_{S_{p+1}} H^0(U_{S_{p+1}}, F) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Alle auftretenden Räume sind Frechterräume, η ist stetig und linear, damit ist η ein Homomorphismus, d.h. offen. λ entsteht aus η durch Beschränkungen, daher ist auch λ eine offene Abbildung. Wir können im Diagramm die untere Zeile auf $B^{p+1}((U_1), nO)$ bzw. $B^{p+1}((U_1), F)$ beschränken, dann ist $\tilde{\delta}$ nach Voraussetzung eine offene Abbildung, so daß auch δ eine offene Abbildung wird.

7.5 Will man die Künnethformeln ausnutzen, ist es vorteilhaft, etwas über die auftretenden analytischen Urbildgarben zu wissen. Wir werden diese daher für einige spezielle Fälle bestimmen. Soweit es sich um lokale Eigenschaften handelt, lassen sie sich direkt auf lokaltriviale Abbildungen übertragen.

Satz: Sei $X \times Y$ das Produkt zweier komplexer Räume A und B kohärente analytische Garben auf X , dann gilt

$$\{\text{Hom}_O(A, B)\}^* = \text{Hom}_O(A^*, B^*).$$

Beweis: Da A und B kohärent sind, ist $\text{Hom}(A, B)$ kohärent und es gilt halmweise $\{\text{Hom}_O(A, B)\}_X = \text{Hom}_{O_X}(A_X, B_X)$. Wir haben halmweise die Ausdrücke

$$\text{I:} = \text{Hom}_{O_X}(A_X, B_X) \otimes_{O_X} O_{XY} \quad \text{II:} = \text{Hom}_{O_{XY}}(A_X \otimes_{O_X} O_{XY}, B_X \otimes_{O_X} O_{XY})$$

zu vergleichen. Setzen wir zur Abkürzung

$$O_X =: O, O_{XY} =: O^*, A_X =: A, B_X =: B.$$

Sei $f: A \rightarrow B$ ein $\mathcal{O}$ -Homomorphismus, dann ist $f \otimes 1: A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* \rightarrow B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*$ ein $\mathcal{O}^*$ -Homomorphismus. Damit erhalten wir eine Abbildung von $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, B)$ in den Modul $\text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*)$. Diese Abbildung setzen wir linear fort zur Abbildung

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, B) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*).$$

Gezeigt werden soll, daß φ ein Isomorphismus ist. Nehmen wir zunächst an, daß gilt $A = p\mathcal{O}$. Dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(p\mathcal{O}, B) = pB$ (Cartan Eilenberg [1]) und wir haben:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(p\mathcal{O}, B) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* = pB \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* = p(B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*) = \text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(p\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*).$$

Da wir es mit Halmen kohärenter analytischer Garben zutun haben, erhalten wir für A eine Auflösung der folgenden Gestalt: $q\mathcal{O} \rightarrow p\mathcal{O} \rightarrow A \rightarrow \mathcal{O}$. Das liefert uns ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\mathcal{O} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, B) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(p\mathcal{O}, B) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(q\mathcal{O}, B) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \end{array}$$

$$\mathcal{O} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(p\mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}^*}(q\mathcal{O}^*, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^*)$$

Die obere Zeile ist exakt nach 7.2 Theorem, die Exaktheit der unteren Zeile ist trivial. Da φ' und φ'' Isomorphismen sind, ist auch φ ein Isomorphismus. Als letztes ist zu bemerken, daß φ offensichtlich ein Garbenhomomorphismus ist. $\square$ q. e. d.

Dieser Satz ermöglicht Aussagen über Annulatorgarben: Sei S eine kohärente analytische Garbe auf X und G eine Unterгарbe von $n\mathcal{O}$. Definieren wir die Abbildung $\xi: S \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(G, nS)$ mit $\xi s(g)_X = g_X s_X$. Dann heißt Kern ξ die Annulatorgarbe S^G . S^G ist offensichtlich kohärent.

Korollar: $(S^G)^* = S^{G*}.$

Beweis: Aus der exakten Garbensequenz

$$\mathcal{O} \rightarrow S^G \rightarrow S \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(G, nS)$$

resultiert nach 7.2 Theorem ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (S^G)^* & \xrightarrow{j} & S^* & \xrightarrow{\xi^*} & (\text{Hom}_0(G, nS))^* \\
 & & \downarrow i & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi \\
 0 & \longrightarrow & S^{*G^*} & \longrightarrow & S^* & \xrightarrow{* \xi} & \text{Hom}_{0*}(G^*, nS^*)
 \end{array}$$

wobei ξ^* die bezüglich des analytischen Urbildgarbenfunktors zu ξ gehörige Abbildung ist und $*\xi$ in analoger Weise zu ξ definiert ist. i ist die kanonische Garbeninjektion, die von j induziert wird. Da φ ein Isomorphismus ist, ist auch i ein Isomorphismus. q. e. d.

Bemerkung: Analog definiert man die Garbe G^S , für die der entsprechende Satz gilt.

Literaturverzeichnis

- BOURBAKI: [1] Topologie générale chap. I, II Paris (1961)
[2] Topologie générale chap. III, IV Paris (1961)
[3] Topologie générale chap. IX Paris (1958)
[4] Topologie générale chap. X Paris (1960)
[5] Espaces vectoriels topologiques chap. I, II Paris (1953)
[6] Espaces vectoriels topologiques chap. III - V Paris (1955)
[7] Espaces vectoriels topologiques (Fascicule des resultats) Paris (1955)
[8] Sur certains espaces vectoriels topologiques Annales de Fourier II (1950)
[9] Intégration chap. I - IV Paris (1952)
- CARTAN: [1] Ideaux de fonctions analytiques de n variables complexes Ann. Ec. norm. (3) (1944)
[2] Un théorème de finitude Ecole normale supérieure 53/54 exposé XVII
- CARTAN - EILENBERG: [1] Homological Algebra Princeton (1956)
- DIEUDONNE - SCHWARTZ: La dualité dans les espaces (F) et (LF) Annales de Fourier I (1950)
- GODEMENT: [1] Théorie des faisceaux Paris (1958)
- GRAUERT: [1] Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen Institute d. h. et. scient. Publ. Mathem. N° 5 (1960)
- GRAUERT - KERNER: [1] Deformationen von Singularitäten komplexer Räume Math. Annalen 153 (1963)
- GRAUERT - REMMERT: [1] Bilder und Urbilder analytischer Garben Annals of Math. Vol. 68 (1958)
[2] Komplexe Räume Math. Annalen 136 (1958)
[3] Lehrbuch der komplexen Analysis, Göttingen (noch nicht veröffentlicht)

- GROTHENDIECK: [1] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 16 (1955)
- [2] Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, Ann. Inst. Fourier 4 (1952)
- [3] Sur certains espaces de fonctions analytiques Journ. reine angewandte Math. 191 (1953)
- [4] Espaces vectoriels topologiques, São Paulo (1958)
- HILTON - WYLIE: [1] Homology theory, Cambridge (1960)
- KELLEY: [1] General topology, New York (1955)
- [2] Linear topological spaces, New York (1963)
- MARINESCU: [1] Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions, Berlin (1963)
- HIRZEBRUCH: [1] Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin (1962)
- NAGATA: [1] Local rings, New York (1962)
- OSGOOD: [1] Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1 (1929)
- SAMPSON - WASHNITZER: [1] A Vietoris mapping theorem for algebraic projective fibre bundles, Ann. of Math. vol. 68 (1958)
- [2] A Künneth formula for coherent algebraic sheaves, Illinois Journ. of Math. vol. 3 (1959)
- SEMINAIRE SCHWARTZ: [1] Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. Paris (1954)
- SÉRRE: [1] Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. vol. 61 (1955)
- [2] Un théorème de finitude, Comm. Math. Helv. vol. 29 (1955)
- [3] Géométrie algébrique et géométrie analytique Ann. Inst. Fourier vol. 6 (1955)
- WEIL: [1] Foundations of algebraic geometry, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 29 (1946)

Lebenslauf

Am 30. Mai 1939 wurde ich in Haselünne, Kreis Meppen, als zweites Kind des Mittelschullehrers Wilhelm Kaup und seiner Ehefrau Elisabeth Kaup, geb. Sunder-Platzmann, geboren. Nach dem Besuch der Grundschule und der beiden ersten Schuljahre auf der städtischen Mittelschule zu Haselünne kam ich 1952 auf den humanistischen Zweig im Gymnasium Georgianum in Lingen und legte dort 1959 die Reifeprüfung ab.

Zum Sommersemester 1959 begann ich in Münster das Studium der Mathematik und Physik. Meine ersten Studienjahre wurden wesentlich beeinflusst von Herrn Professor Dr. Dr. h.c. H. Behnke, Herrn Prof. Dr. H. Petersson, Herrn Prof. Dr. H. Tietz, sowie Herrn Prof. Dr. H. Hermes, der mich zur Beschäftigung mit der mathematischen Logik anregte. Zum Sommersemester 1962 ging ich nach Erlangen, um unter Anleitung von Herrn Professor Dr. R. Remmert auf dem Gebiet der komplexen Analysis zu arbeiten.

Erlangen, Dezember 1964

Günther Kaup

Fotodruck

- Wiltrud Hogl, Erlangen, Brüxer Straße 9, (Nähe Röthelheimbad) Telefon 1636 -